Cálculo I
Limites e continuidade
via imagens de intervalos
PURO - UFF
6 / abril / 2009
Prof: Eduardo Ochs

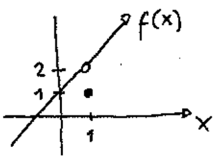
Podemos definir o "diâmetro" de um conjunto do modo óbvio:

$\mathrm{diam}([3,4]) = 4-3 = 1$

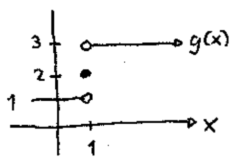
$\mathrm{diam}((1,2) \cup \{5\}) = 5-1 = 4$

esta idéia de "diâmetro de um conjunto" vai nos dar um modo bem visual de entender limites e continuidade – mas antes de vermos este modo é melhor fazermos alguns exercícios mais básicos...

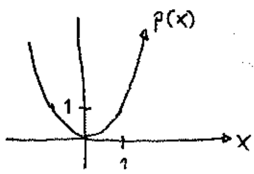
Lembre que nossas funções preferidas são estas daqui:



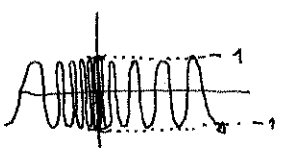
$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{quando } x \neq 1, \\ 1 & \text{quando } x = 1 \end{cases}$



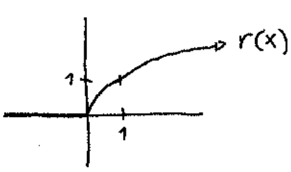
$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{quando } x < 1, \\ 2 & \text{quando } x = 1, \\ 3 & \text{quando } x \end{cases}$



$p(x) = x^2$



$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{quando } x \neq 0, \\ 0 & \text{quando } x = 0 \end{cases}$



$r(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{quando } x \geq 0, \\ 0 & \text{quando } x < 0 \end{cases}$

Exercícios:

1 a) Encontre as imagens dos intervalos

$A_{\Delta x} := [1-\Delta x, 1)$

$B_{\Delta x} := [1-\Delta x, 1]$

$C_{\Delta x} := [1-\Delta x, 1+\Delta x]$

$D_{\Delta x} := [1-\Delta x, 1) \cup (1, 1+\Delta x]$

$E_{\Delta x} := [1, 1+\Delta x]$

$F_{\Delta x} := (1, 1+\Delta x]$

pelas funções f, g e p para cada valor de Δx com $\Delta x > 0$, e diga o diâmetro destas imagens.

b) Encontre as imagens dos intervalos

$L_{\Delta x} := [-\Delta x, 0]$

$R_{\Delta x} := [0, \Delta x]$

$S_{\Delta x} := [-\Delta x, \Delta x]$

pelas funções p, h e r, e diga o diâmetro destas imagens.

Cálculo I
Limites e continuidade
via imagens de intervalos
PURO - UFF
6 de abril de 2009
Prof: Eduardo Ochs

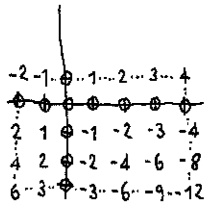
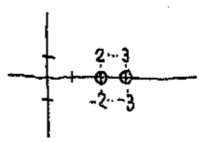
Podemos definir (temporariamente!) a "imagem pela soma", a "imagem pelo produto", a "imagem pela divisão" e a "imagem pela subtração" de dois conjuntos:

$$A+B := \{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$$
$$A\cdot B := \{ab \mid a\in A,\ b\in B\}$$
$$A/B := \{\tfrac{a}{b} \mid a\in A,\ b\in B\}$$
$$A-B := \{a-b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

Quando A e B são intervalos A+B e A−B são bem fáceis de calcular:

$$[a_1,a_2]+[b_1,b_2] = [a_1+b_1, a_2+b_2]$$
$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$
$$[a_1,a_2]-[b_1,b_2] = [a_1-b_2, a_2-b_1]$$
$$(a_1,a_2)-(b_1,b_2) = (a_1-b_2, a_2-b_1)$$

É mais difícil encontrarmos uma expressão para $[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]$, mas podemos encontrar o resultado facilmente fazendo um diagrama...
Por exemplo, para $[-2,4]\cdot[-3,1]$
e $[2,3]\cdot[-1,1]$,
temos:


e


os valores extremos (i.e., máximos e mínimos) do produto são atingidos nos cantos do retângulo, e:

$$[-2,4]\cdot[-3,1] = [-12,6]$$
$$[2,3]\cdot[-1,1] = [-3,3]$$

(Obs: este tipo de argumento vai ser visto em detalhes em Cálculo II)

Exercícios:

a) Encontre
$[-3,4]\cdot[1,2]$,
$[-3,4]/[1,2]$,
$[-3,4]/[-2,-1]$.

b) Encontre um $x\in[2,3]$ e $y\in[-1,0)$ tais que $\frac{x}{y} = -1\,000\,000$.

c) Para $0<\Delta x\leq 1$, encontre
$[4-\Delta x, 4+\Delta x]+[2-\Delta x, 2+\Delta x]$,
$[4-\Delta x, 4+\Delta x]\cdot[2-\Delta x, 2+\Delta x]$,
$[3-\Delta x, 3+\Delta x]\cdot[-\Delta x, +\Delta x]$.

d) Para $0<\Delta x\leq 1$, encontre
$[3-\Delta x, 3+\Delta x]/[2-\Delta x, 2+\Delta x]$ e
$[3-\Delta x, 3+\Delta x]\cdot[\frac{1}{2+\Delta x}, \frac{1}{2-\Delta x}]$.