CÁLCULO I

LIMITES E CONTINUIDADE

VIA IMAGENS DE INTERVALOS

PURO - UFF

8 DE ABRIL DE 2009

REVISÃO DE ALGUNS FATOS BÁSICOS SOBRE LÓGICA E CONJUNTOS

A união, a interseção, a diferença de conjuntos, $\subseteq$, imagem, etc, etc, essas coisas todas são definidas formalmente usando só "$\in$" e lógica básica:

$$A \subseteq B \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall a \in A.\ a \in B$$
$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$
$$a \in \{10, 20, 30\} \overset{def}{\Leftrightarrow} a=10 \text{ ou } a=20 \text{ ou } a=30$$
$$a \in B \cup C \overset{def}{\Leftrightarrow} a \in B \text{ ou } a \in C$$
$$a \in B \cap C \overset{def}{\Leftrightarrow} a \in B \text{ e } a \in C$$
$$a \in B \setminus C \overset{def}{\Leftrightarrow} a \in B \text{ e } a \notin C$$
$$x \in \{a \in A \mid P(a)\} \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ e } P(x)$$
$$b \in \{f(a) \mid a \in A\} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists a \in A.\ f(a) = b$$

Daí:

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists a \in A.\ a \notin B$$
$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subseteq B \text{ ou } B \not\subseteq A$$
$$a \notin \{10, 20, 30\} \Leftrightarrow a \neq 10 \text{ e } a \neq 20 \text{ e } a \neq 30$$
$$a \notin B \cup C \Leftrightarrow a \notin B \text{ e } a \notin C$$
$$a \notin B \cap C \Leftrightarrow a \notin B \text{ ou } a \notin C$$
$$a \notin B \setminus C \Leftrightarrow a \notin B \text{ ou } a \in C$$
$$x \notin \{a \in A \mid P(a)\} \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } (x \in A \text{ e não } P(x))$$
$$b \notin \{f(a) \mid a \in A\} \Leftrightarrow \forall a \in A.\ f(a) \neq b$$
$$\{a\} \subseteq A \Leftrightarrow a \in A$$

① EXERCÍCIO: verifique que você entende muito bem as definições e os fatos acima; enquanto você não entender consulte livros, colegas, a Ana Isabel na aula de Cálculo 0, pense muito, etc.

IMAGENS DE CONJUNTOS

Para cada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vamos definir uma outra função, que (infelizmente, por convenção) vai ter o mesmo nome que a f original, mas que leva subconjuntos de $\mathbb{R}$ em subconjuntos de $\mathbb{R}$... para $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$f(A) \overset{def}{:=} \{f(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Daí:

$$f(\{10, 20, 30\}) = \{f(10), f(20), f(30)\}$$
$$f(\emptyset) = \emptyset$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
etc.

② Exercício: entenda isto...

Obs: às vezes é útil definir uma outra operação para cada função f; esta operação não tem nem um nome padrão nem uma notação padrão, mas nós a chamamos de "levantamento do conjunto para a curva"... sua definição é:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

③ Exercício: se $f(x) = x^2$, encontre

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \{2\}\},$$
$$\{(x, f(x)) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\}\}$$

(Dica: lembre que estes conjuntos são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, não de $\mathbb{R}$, e que a imagem de um conjunto A por f é a "projeção sobre o eixo vertical" do levantamento de A por f...)