CÁLCULO I
PURO - UFF
15 de abril de 2009
PROF: EDUARDO OCHS

(ESTA FOLHA É UMA ESPÉCIE DE RESUMO DOS PRIMEIROS TEOREMAS IMPORTANTES DO CURSO, COM DICAS SOBRE COMO ACOMPANHAR OS CAPÍTULOS SOBRE ELES NO LIVRO...)

PRIMEIROS TEOREMAS:

1. Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existem então
$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$
2. Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existem então
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$
3. Se f e g são contínuas em x_0 então $s(x) = f(x)+g(x)$ é contínua em x_0.
4. Se f e g são contínuas em x_0 então $p(x) = f(x)g(x)$ é contínua em x_0.
5. Se f é não-decrescente então $f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$.
6. Se f é não-decrescente e contínua então $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
7. Se f é crescente e contínua então $\forall y \in$ [redacted] $[f(a), f(b)]$. $\exists!\, x \in [a,b].\ f(x) = y$.
8. Uma função derivável é contínua.
9. Uma função com derivada >0 é crescente.

Os teoremas ① e ② estão enunciados no livro (obs: "o livro" vai sempre querer dizer o livro do Munem & Foulis, "Cálculo", vol. 1) na seção 1.2, "Propriedades dos limites de funções", págs 57 e 58, mas só são provados na seção 1.7, págs 83 à 85, e os teoremas ③ e ④ são conseqüências imediatas do ① e do ②.

A prova do ② no livro usa [redacted] um método diferente do nosso... nós usamos dois lemas sobre intervalos:

Lembre que definimos
$$[a,b]+[c,d] := \{x+y \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$$ e
$$[a,b]\cdot[c,d] := \{xy \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}.$$
Os lemas são:

$\boxed{1}$ Para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ e $r\in[0,\infty)$ temos:
$$[a-r, a+r] + [b-r, b+r] = [a+b-2r, a+b+2r]$$
Repare que isto ~~quer dizer~~ implica que
se $a-r \leq \alpha \leq a+r$ e $b-r \leq \beta \leq b+r$
então $a+b-2r \leq \alpha+\beta \leq a+b+2r$

$\boxed{2}$ Para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ e $r\in[0,1]$ temos:
$$[a-r, a+r]\cdot[b-r, b+r] \subseteq [ab-(|a|+|b|+1)r,\ ab+(|a|+|b|+1)r]$$
Repare que isto implica que
se $a-r \leq \alpha \leq a+r$ e $b-r \leq \beta \leq b+r$
então $ab-(|a|+|b|+1)r \leq \alpha\beta \leq ab+(|a|+|b|+1)r$

A prova do $\boxed{1}$ é imediata, mas a do $\boxed{2}$ não...
Lembre que $[a,b]\cdot[c,d] = [\min(ac,ad,bc,bd), \max(ac,ad,bc,bd)]$, mas isto nos dá um intervalo que não é centrado no produto dos centros dos intervalos originais.
Repare:

$$\begin{aligned}(a-r)(b-r) &= ab-ar-br+r^2\\ &\geq ab-|a|r-|b|r-r\\ &= ab-(|a|+|b|+1)r\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}(a-r)(b-r) &= ab-ar-br+r^2\\ &\leq ab+|a|r+|b|r+r\\ &= ab+(|a|+|b|+1)r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-r)(b+r) &= ab+ar-br-r^2\\ &\geq ab-|a|r-|b|r-r\\ &= ab-(|a|+|b|+1)r\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}(a-r)(b+r) &= \ldots\\ &\leq \ldots\\ &= ab+(|a|+|b|+1)r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+r)(b-r) &= \ldots\\ &\geq \ldots\\ &= ab-(|a|+|b|+1)r\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}(a+r)(b-r) &= \ldots\\ &\leq \ldots\\ &= ab+(|a|+|b|+1)r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+r)(b+r) &= \ldots\\ &\geq \ldots\\ &= ab-(|a|+|b|+1)r\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}(a+r)(b+r) &= \ldots\\ &\leq \ldots\\ &= ab+(|a|+|b|+1)r\end{aligned}$$

e daí $[a-r, a+r]\cdot[b-r, b+r] \subseteq [ab-(|a|+|b|+1)r,\ ab+(|a|+|b|+1)r]$.

(CONTINUA...)

Cálculo I
Puro - UFF
15 de abril de 2009
Prof: Eduardo Ochs

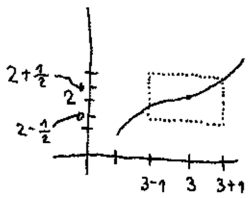
Como isto nos ajuda a entender que o limite do produto é o produto dos limites? Vamos olhar para um caso concreto, e representar graficamente o que estas desigualdades estão dizendo. Digamos que f e g sejam contínuas em $x_0 = 3$, e que

$f(3) = 2$, e
$g(3) = 4$.

Vamos representar fatos como

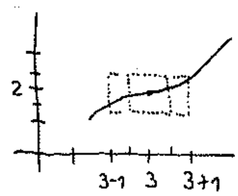
$$\forall x \in [3-1, 3+1].\ f(x) \in [2-\tfrac{1}{2}, 2+\tfrac{1}{2}]$$

por caixinhas:



~~repare que as paredes da esquerda e da direita querem dizer "não estamos interessados~~

Cada caixinha dessas vai querer dizer: "para os valores de x entre a parede da esquerda e a parede da direita a imagem do x está entre a parede de cima e a parede de baixo", e se uma caixinha dessas é "verdade" então uma caixinha mais estreita também é:



$$\forall x \in [3-\tfrac{1}{2}, 3+\tfrac{1}{2}].\ f(x) \in [2-\tfrac{1}{2}, 2+\tfrac{1}{2}].$$

Para vermos que $p(x)$ é contínua em $x_0 = 3$ precisamos ser capazes de mostrar que

$$\forall \Delta p > 0.\ \exists \Delta x > 0.\ \forall x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x].$$
$$p(x) \in [p(x_0) - \Delta p, p(x_0) + \Delta p].$$

Vamos olhar para dois casos particulares - $\Delta p = 3$ e $\Delta p = 1$ - e aí o método geral deve ficar claro.

Quando $\Delta p = 3$ queremos um r tal que

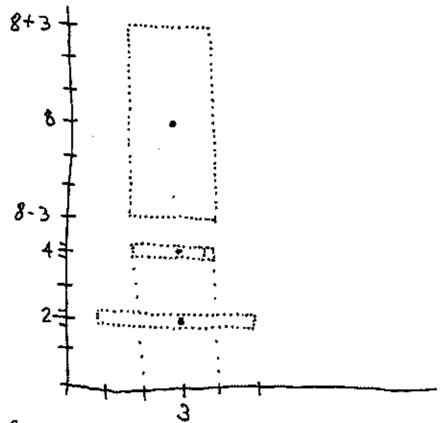
$$[f(3)-r, f(3)+r] \cdot [g(3)-r, g(3)+r] \subseteq [f(3)g(3) - \Delta p, f(3)g(3) + \Delta p],$$

i.e., $[2-r, 2+r] \cdot [4-r, 4+r] \subseteq [2\cdot 4 - 3, 2\cdot 4 + 3]$;

como $[2-r, 2+r] \cdot [4-r, 4+r] \subseteq [2\cdot 4 - (|2|+|4|+1)r,\ 2\cdot 4 - (|2|+|4|+1)r]$,

basta tomarmos $r = \frac{1}{3}$.

Como f e g têm limite quando $x_0 = 3$, existem raios horizontais para as suas caixinhas centradas em $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0, g(x_0))$ com raios verticais $r = \frac{1}{3}$:



Se estes raios são $\Delta x_f = 2$ e $\Delta x_g = 1$, então na interseção dos intervalos horizontais

$[x_0 - \Delta x_f, x_0 + \Delta x_f]$ e
$[x_0 - \Delta x_g, x_0 + \Delta x_g]$

o produto da f e da g vai estar em $[2\cdot 4 - 3, 2\cdot 4 + 3]$...

Mais formalmente, se $\Delta x = \min(\Delta x_f, \Delta x_g)$ então:

$$\forall x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x].$$
$$f(x)g(x) \in [f(x_0)g(x_0) - \Delta p, f(x_0)g(x_0) + \Delta p]$$