Cálculo I
PURO-UFF - 2009.1
Exercícios - 29/abril/2009

As duas funções abaixo definem uma trajetória de um ponto no plano:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{quando } t < 0 \\ \cos(t) & \text{quando } 0 \le t \le \pi \\ (t-\pi)^2 - 1 & \text{quando } \pi < t \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} t & \text{quando } t < 0 \\ \operatorname{sen}(t) & \text{quando } 0 \le t \le \pi \\ -(t-\pi) & \text{quando } \pi < t \end{cases}$$

Vamos usar uma abreviação: $p(t) = (x(t), y(t))$.
Note que para cada valor de t o valor de $p(t)$ é um ponto do plano (x, y) — se quisermos pensar nele como um vetor ele é o "vetor posição".
Às vezes vamos escrever vetores horizontalmente — $p(x) = (x(t), y(t))$ —, às vezes verticalmente: $p(x) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

(1) Para cada um dos valores de t abaixo,
$-3, -2, -1, 0$
$\frac{1}{6\pi}, \frac{2}{6\pi}, \frac{3}{6\pi}, \frac{4}{6\pi}, \frac{5}{6\pi},$
$\pi, \pi + \frac{1}{2}, \pi + 1, \pi + 2$
calcule $x(t)$ e $y(t)$.

(2) Para cada um dos valores de t do exercício 1 desenhe o ponto $p(t)$ no plano (x, y).

(3) Use os pontos que você desenhou no exercício 2 e tente fazer um esboço da trajetória completa. (Obs: os exercícios seguintes vão nos permitir melhorar muito este esboço).

Agora considere mais estas funções:

$$\begin{array}{ll} x_1(t) = 1 & y_1(t) = t \\ x_2(t) = \cos(t) & y_2(t) = \operatorname{sen}(t) \\ x_3(t) = (t-\pi)^2 - 1 & y_3(t) = -(t-\pi) \\ x_4(t) = t^2 - 1 & y_4(t) = -t \\ x_5(t) = t^2 & y_5(t) = -t \end{array}$$

Elas definem novas trajetórias: $p_1 = (x_1(t), y_1(t))$, $p_2 = (x_2(t), y_2(t))$, $p_3 = (x_3(t), y_3(t))$, $p_4 = (x_4(t), y_4(t))$, $p_5 = (x_5(t), y_5(t))$.

(4) Desenhe o gráfico de $x_1(t)$ no plano (t, x) (i.e., com o eixo t na horizontal e o $x_1(t)$ na vertical).
(5) Desenhe o gráfico de $x_2(t)$ no plano (t, x).
(6) Desenhe o gráfico de $x_5(t)$ no plano (t, x).
(7) Desenhe o gráfico de $x_4(t)$ no plano (t, x).
(8) Desenhe o gráfico de $x_3(t)$ no plano (t, x).
(9) Desenhe os gráficos de $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t)$ no plano (t, y).
(10) Desenhe o gráfico de $x(t)$ no plano (t, x).
(11) Desenhe o gráfico de $y(t)$ no plano (t, y).

Nos exercícios abaixo use a definição de derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

Obs: em cada caso comece reescrendo a fórmula da definição substituindo o f pelo nome da função sendo derivada e o x_0 pelo ponto onde a derivada vai ser calculada.
(12) Calcule a derivada da função $x_1(t)$ em $t = -1$.
(13) Calcule a derivada da função $x_1(t)$ para qualquer t.
(14) Calcule a derivada da função $x_5(t)$ para $t = 1$.
(15) Calcule a derivada da função $x_4(t)$ para $t = 2$.
(16) Calcule a derivada da função $x_4(t)$ para $t = 1$.
(17) Calcule a derivada da função $x_4(t)$ para qualquer t.
(18) Calcule a derivada da função $x_3(t)$ para $t = \pi + 1$.
(19) Calcule a derivada da função $x_3(t)$ para qualquer t.
(20) Seja $c(x) = x^3$. Calcule $c'(x)$ para qualquer x.
(21) Seja $q(x) = x^4$. Calcule $q'(x)$ para qualquer x.

Por enquanto acredite que a derivada do seno é o cosseno (i.e., $\mathrm{sen}'\,\theta = \cos\theta$) e que a derivada do cosseno é -1 vezes o seno (i.e., $\cos'\theta = -\,\mathrm{sen}\,\theta$); vamos ver um argumento geométrico para isto depois.
(22) Calcule a derivada da função $x_2(t)$ para todo t.
(23) Calcule a derivada da função $y_2(t)$ para todo t.
(24) Calcule a derivada da função $x(t)$ para todo t.
(25) Calcule a derivada da função $y(t)$ para todo t.
(26) Desenhe os gráficos de $x_1'(t), x_2'(t), x_5'(t), x_4'(t), x_3'(t)$ no plano (t, x).
(27) Desenhe os gráficos de $y_1'(t), y_2'(t), y_5'(t), y_4'(t), y_3'(t)$ no plano (t, y).
(28) Desenhe o gráfico de $x'(t)$ no plano (t, x).
(29) Desenhe o gráfico de $y'(t)$ no plano (t, y).
(30) Compare o gráfico de $x'(t)$ com os gráficos de $x_1'(t), x_2'(t), x_5'(t), x_4'(t)$ e $x_3'(t)$.
(31) Compare o gráfico de $y'(t)$ com os gráficos de $y_1'(t), y_2'(t), y_5'(t), y_4'(t)$ e $y_3'(t)$.

As funções $x(t)$ e $y(t)$ são definidas "por casos": elas têm definições diferentes (em termos de funções mais simples) no casos $t < 0$, $0 \le t \le \pi$ e $\pi < t$.
(32) Porque é que quando ε é bem pequeno $x(-1+\varepsilon)$ coincide com $x_1(-1+\varepsilon)$? Quão pequeno esse ε deve ser?
(33) Porque é que as derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ coincidem com as derivadas das funções $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ em certos intervalos?

Agora use o que você sabe de cálculo vetorial para calcular:
(34) $p_1(-1+\varepsilon) - p_1(1)$
(35) $p(-1+\varepsilon) - p(1)$
(36) $\frac{p(-1+\varepsilon)-p(1)}{\varepsilon}$
(37) $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{p(-1+\varepsilon)-p(1)}{\varepsilon}$
(38) $p'(-1)$
(39) $p_5(1+\varepsilon) - p_5(1)$
(40) $p_3(\pi+1+\varepsilon) - p_3(\pi+1)$
(41) $p(\pi+1+\varepsilon) - p(\pi+1)$
(42) $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{p(\pi+1+\varepsilon)-p(\pi+1)}{\varepsilon}$
(43) $p'(\pi+1)$

O melhor modo de desenhar um vetor $p(t_1) - p(t_0)$ é como um "vetor de deslocamento", pondo a sua base em $p(t_0)$ e a sua ponta em $p(t_1)$.

Desenhe os vetores de deslocamento:
(Dica: $\cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86602... \approx 0.85$, e $\frac{\pi}{6} = 0.52359... \approx 0.5$).
(44) $p(-1) - p(-2)$
(45) $p(0) - p(-1)$
(46) $p(\frac{3\pi}{6}) - p(0)$
(47) $p(\frac{2\pi}{6}) - p(0)$
(48) $p(\frac{\pi}{6}) - p(0)$
(49) $p(\frac{6\pi}{6}) - p(\frac{3\pi}{6})$
(50) $p(\frac{5\pi}{6}) - p(\frac{3\pi}{6})$
(51) $p(\frac{4\pi}{6}) - p(\frac{3\pi}{6})$
(52) $p(\pi+2) - p(\pi+\frac{1}{2})$
(53) $p(\pi+1) - p(\pi+\frac{1}{2})$
(54) $p(\pi+\frac{1}{2}) - p(\pi+\frac{1}{2})$

Podemos encarar um vetor $\frac{p(t_1)-p(t_0)}{t_1-t_0}$ como uma "aproximação para o vetor velocidade". O melhor modo de representá-lo é apoiando-o em $p(t_0)$, e quando t_1 tende a t_0 este vetor tende ao "vetor velocidade instantânea" da trajetória p no instante t_0, $p'(t)$.

Represente no gráfico:
(55) $(p(-1) - p(-2))/(-1-(-2))$
(56) $(p(0) - p(-1))/(0-(-1))$
(57) $(p(\frac{3\pi}{6}) - p(0))/(\frac{3\pi}{6} - 0)$
(58) $(p(\frac{2\pi}{6}) - p(0))/(\frac{2\pi}{6} - 0)$
(59) $(p(\frac{\pi}{6}) - p(0))/(\frac{\pi}{6} - 0)$
(60) $(p(\frac{6\pi}{6}) - p(\frac{3\pi}{6}))/(\frac{6\pi}{6} - \frac{3\pi}{6})$
(61) $(p(\frac{5\pi}{6}) - p(\frac{3\pi}{6}))/(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6})$
(62) $(p(\frac{4\pi}{6}) - p(\frac{3\pi}{6}))/(\frac{4\pi}{6} - \frac{3\pi}{6})$
(63) $(p(\pi+2) - p(\pi+\frac{1}{2}))/(\pi+2-(\pi+\frac{1}{2}))$
(64) $(p(\pi+1) - p(\pi+\frac{1}{2}))/(\pi+1-(\pi+\frac{1}{2}))$
(65) $(p(\pi+\frac{1}{2}) - p(\pi+\frac{1}{2}))/(\pi+\frac{1}{2}-(\pi+\frac{1}{2}))$

Represente no gráfico os seguintes vetores velocidade:
(66) $p'(-1)$
(67) $p'(\pi + \frac{1}{2})$
(68) $p'(\pi + 1)$
(69) $p'(\pi + 2)$

Como entre $t = 0$ e $t = \pi$ a trajetória $p(t)$ percorre o círculo de raio 1 centrado na origem com uma velocidade radial constante, dá pra deduzir que o vetor velocidade tem que ser perpendicular ao vetor posição, e ambos devem ter módulo 1; quando $0 \le t \le \pi$ o vetor posição vai ser $p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e o vetor velocidade vai ser $p'(t) = (\cos t + \frac{\pi}{2}, \operatorname{sen} t + \frac{\pi}{2}) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ — ou seja, $(\cos' t, \operatorname{sen}' t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$.
Represente no gráfico os seguintes vetores velocidade:
(70) $p'(\frac{\pi}{6})$
(71) $p'(\frac{2\pi}{6})$
(72) $p'(\frac{3\pi}{6})$
(73) $p'(\frac{4\pi}{6})$
(74) $p'(\frac{5\pi}{6})$

(75) Verifique que $p_1'(0) = p_2'(0)$.
(76) Verifique que $p_2'(\pi) = p_3'(\pi)$.

Considere esta outra trajetória: $x(t) = t$, e
$$y(t) = \begin{cases} -t & \text{quando } t < 0 \\ t & \text{quando } t \ge 0 \end{cases}$$
(77) Represente-a no plano (x, y).
(78) Faça o gráfico de $x'(t)$ no plano (t, x).
(79) Faça o gráfico de $y'(t)$ no plano (t, y).
(80) Represente os vetores velocidade desta trajetória no plano (x, y).
(81) Esta trajetória tem alguma mudança brusca de velocidade? Ela é possível fisicamente? E a trajetória $p(t)$?