CÁLCULO II

PURO / UFF - 30/março/2009

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO DE INTEGRAL DEFINIDA

① Considere as funções:

$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$,

$F(\theta) = -\cos\theta$,

$G(\theta) = 1 - \cos\theta$,

$H(\theta) = 4 - \cos\theta$,

$F_a(b) = \int_{\theta=a}^{\theta=b} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$

a) Mostre que F, G, H são primitivas para f.

b) Use um argumento geométrico para mostrar que quando ε é um número real positivo bem pequeno temos

$$F_a(b+\varepsilon) - F_a(b) \cong \varepsilon \cdot f(b)$$

e que isto também vale para ε negativo com módulo bem pequeno; daí,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_a(b+\varepsilon) - F_a(b)}{\varepsilon} = f(b)$$

e portanto $\frac{d}{db} F_a(b) = f(b)$ - ou seja, F_a é uma primitiva para f.

c) Podemos calcular integrais definidas de uma função g a partir de uma primitiva qualquer para g:

$$\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx = \left(\int g(x)\,dx\right)\Big|_a^b$$

Use isto para calcular $F_a(b)$ a partir de F, G, H.

d) Verifique que $F_0(\theta) = G(\theta)$ e que $F_{-\pi/2}(\theta) = F(\theta)$.

e) Encontre uma expressão para $F_a(b) - F_\alpha(b)$. Verifique que ela não depende de b. Interprete o valor de $F_a(b) - F_\alpha(b)$ geometricamente.

f) Tente encontrar um valor de a para o qual $H(\theta) = F_a(\theta)$.

g) As funções da forma $C - \cos\theta$ são "primitivas para f"; as funções da forma $F_a(\theta)$ são "integrais definidas de f". Toda primitiva para f é uma integral definida para f? Toda integral definida de f é uma primitiva para f? Responda para o caso que você acabou de ver - $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ - e depois tente os casos $f(x) \equiv x$ e $f(x) \equiv 0$.

② Sabemos que $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 1$.

Se $x = 2\theta$, compare a figura para $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$ com a figura para $\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\, dx$, e mostre - por um argumento geométrico - que

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\, dx = 2.$$

Compare $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$,

$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \operatorname{sen} x\, d\theta$,

$\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\, d\theta$,

$\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\, dx$.