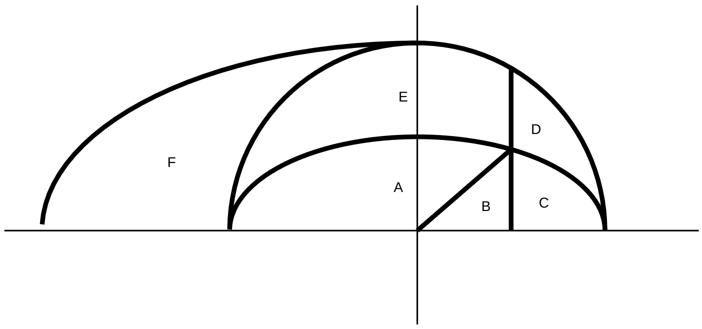
Cálculo 2
PURO-UFF - 2009.1
Questões de revisão para a prova
15/maio/2009

(1) Na figura abaixo as regiões A, B, C, D, E e F do plano são disjuntas, e elas são delimitadas pelas curvas

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}x^2} \\ g(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ h(x) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

e pelas retas $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, e por um segmento de reta que liga o ponto $(0, 0)$ ao cruzamento da curva g e da reta $x = \frac{1}{2}$ (ref: Munem, pp.282–296).



(a) Quais são as coordenadas do ponto entre as regiões A, B, C, D e E?
(b) Expresse as áreas de A, B, C, D, E e F como integrais ou como somas ou diferenças de integrais. *Não é preciso calcular o valor destas integrais.*
(c) Calcule as áreas de A, C, D e F.

Fórmulas:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} - \arccos x\right)$$

Início da resolução:

$$\begin{aligned} p &= (0, h(\tfrac{1}{2})) = (0, \tfrac{\sqrt{3}}{4}) \\ r(x) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}x \\ \text{Área}(A + B + C + D + E) &= \int_{-1}^{1} g(x)\, dx \\ \text{Área}(A + B + C) &= \int_{-1}^{1} h(x)\, dx \\ \text{Área}(A) &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} h(x)\, dx - \int_{-1}^{\frac{0}{2}} r(x)\, dx \end{aligned}$$

(2) Encontre uma primitiva para cada uma das integrais abaixo:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x-4)}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)(x-4)}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)^2}\,dx$

(3) Encontre primitivas para as integrais indefinidas abaixo (você vai ter que fazer integração por partes duas vezes em cada uma):

(a) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

(b) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

(4) As integrais que costumamos resolver por substituição trigonométrica geralmente são da forma $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, onde $F(\alpha, \beta)$ é um quociente de polinômios em α e β; por exemplo,

$$\int \frac{x^2-1}{\sqrt{4x^2-9}^3}\,dx$$

que é $\int F(x, \sqrt{x^2-9x})\,dx$ para $F(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2-1}{\beta^3}$. A raiz quadrada é o "termo malvado" da integral; integrais da forma $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, para a, b e c constantes arbitrárias, são as "piores", e para resolvê-las precisamos fazer uma substituição para pô-las na forma $\int G(x, \sqrt{ax^2+c})\,dx$ (para outro a e outro b), e para resolver estas precisamos fazer outra substituição para "melhorá-las" mais uma vez — e obtemos $\int H(x, \sqrt{\pm x^2 \pm 1})$ (Ref: Munem, pp.491–496).
Nos itens (a) e (b) abaixo só faça uma substituição de variáveis para reduzir a integral a um caso "melhor"; só no item c você vai precisar encontrar uma primitiva para a integral.

(a) Use uma substituição do tipo $x = u + k$ para se livrar do termo "$+bx$" na raiz quadrada em:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+10x-5}}{2x+3}\,dx$$

(b) Use uma substituição do tipo $x = ku$ para melhorar esta integral:

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-25}}{x^2+1}\,dx$$

(c) Encontre uma primitiva para: