Notas sobre mudança de variável de integração
Eduardo Ochs - 2009may21
Versão: 2009may25
PURO-UFF

Uma das idéias mais estranhas de Cálculo II é o método de mudança de variável (a.k.a. "substituição"). Eu levei anos pra conseguir entender intuitivamente porque ele funcionava — antes o método me parecia só um truque formal com uns detalhes que às vezes eu lembrava direito, às vezes não... Estas notas são sobre um modo de ver o método que torna ele mais natural... *isto é uma versão preliminar — ainda pretendo reescrever partes disto e acrescentar coisas.*

O retângulo à esquerda do diagrama da próxima página mostra uma prova "moderna" da fórmula de substituição de variáveis, que é:

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g'(u)\,du$$

Note que o intervalo de integração muda, e que há um pequeno abuso de linguagem em $\int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g'(u)\,du$ — quando o 'u' aparece sozinho ele é a variável de integração, mas em '$u(a)$' e '$u(b)$' ele é uma função. Podemos pensar que a função u "recebe um valor de x e retorna um valor de u" e que a g "recebe um valor de u". Em Física este tipo de idéia é comum — por exemplo, num certo problema o x pode representar uma distância, um valor de u (ou do u como variável, ou de $u(x)$) pode representar uma temperatura, e o valor de $g(u)$ pode representar energia; aí os valores de x, u e de g são de "tipos diferentes", e não podem ser misturados... e não é raro os valores "variarem juntos" — quando a posição muda a temperatura muda, e uma é função da outra, etc.

Suponha que partimos o intervalo de integração original, $[a, b]$, em n intervalinhos, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, e que cada x_i está bastante próximo do x_{i+1}. O novo intervalo de integração vai ser $[u(a), u(b)]$, e a partição correspondente vai ser $[u(x_0), u(x_1)], [u(x_1), u(x_2)], \ldots, [u(x_{n-1}), u(x_n)]$. Se definirmos $u_i := u(x_i)$ podemos escrever esta partição como $[u_0, u_1], [u_1, u_2], \ldots, [u_{n-1}, u_n]$. Note que $x_0 = a, x_n = b, u_0 = u(a), u_n = u(b)$.

(Obs: pelas convenções da notação de intervalos, quando escrevemos $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$ fica implícito que $a \leq b$ e que $\forall i.\, x_i \leq x_{i+i}$ — mas tudo que vamos ver aqui continua válido quando a e b e os 'x_i's não estão "em ordem".)

Repare que:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \sum_{i=0,\ldots,n-1} \int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} f(x)\,dx$$

e idem para integração no intervalo $[u(a), u(b)]$ na variável u.

O retângulo à esquerda no diagrama abaixo fala de integração no intervalo todo, e o da direita fala de integração em um dos n intervalinhos — para algum i em $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. *Esta passagem — de uma fórmula no intervalão para uma fórmula em um dos intervalinhos individuais — vai ser importante daqui a pouco, porque vamos precisar usar aproximações que só são válidas em intervalos de integração pequenos.*

O diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\int_{x=a}^{x=b} (\frac{d}{dx}\, g(u(x)))\, dx \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & g(u(x))\big|_{x=a}^{x=b} \arrow[dd, equal] \\
\int_{x=a}^{x=b} g'(u(x))u'(x)\, dx & \\
\int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g'(u)\, du \arrow[r, equal] & g(u)\big|_{u=u(a)}^{u=u(b)}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} (\frac{d}{dx}\, g(u(x))\, dx \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & g(u(x))\big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \arrow[dd, equal] \\
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} g'(u(x))u'(x)\, dx & \\
\int_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} g'(u)\, du \arrow[r, equal] & g(u)\big|_{u=u_i}^{u=u_{i+1}}
\end{tikzcd}$$

Agora vamos passar para a notação antiga, na qual não só as derivadas são escritas como "$\frac{du}{dx}$" como muitos argumentos de funções são deixados implícitos e omitidos — por exemplo, $\frac{du}{dx}$ é na verdade $\frac{du}{dx}(x)$, e $\frac{dg}{du}$ é $\frac{dg}{du}(u(x))$ nos contextos nos quais a variável é 'x' e $\frac{dg}{du}(u)$ nos contextos nos quais a variável é 'u'.

$$\begin{tikzcd}
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} (\frac{d}{dx}\, g(u(x)))\, dx \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & g(u(x))\big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \arrow[dd, equal] \\
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} g'(u(x))u'(x)\, dx & \\
\int_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} g'(u)\, du \arrow[r, equal] & g(u)\big|_{u=u_i}^{u=u_{i+1}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \frac{dg}{dx}\, dx \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & g\big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \arrow[dd, equal] \\
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}\, dx & \\
\int_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} \frac{dg}{du}\, du \arrow[r, equal] & g\big|_{u=u_i}^{u=u_{i+1}}
\end{tikzcd}$$

Se o valor de $f(x)$ varia muito pouco em torno de x_i então $\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} f(x)\, dx \approx f(x_i)$ — a área medida pela integral é aproximadamente a área de um retângulo de altura $f(x_i)$ e largura $x_{i+1} - x_i$. Se definimos $\Delta x := x_{i+1} - x_i$ e $\Delta u := u_{i+1} - u_i$ e aplicamos as aproximações às três integrais, temos:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}\, dx & \approx & \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}\Delta x \\
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \frac{dg}{dx}\, dx & \approx & \frac{dg}{dx}\Delta x \\
\int_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} \frac{dg}{du}\, du & \approx & \frac{dg}{du}\Delta u
\end{array}$$

Se a g é derivável em torno de $u_i = u(x_i)$, temos $g(u_i + \epsilon) \approx g(u_i) + g'(u_i)\epsilon$ para ϵ suficientemente pequeno; ou seja, $g(u)\big|_{u=u_i}^{u=u_i+\epsilon} \approx g'(u_i)\epsilon$. Se reescrevemos $u_i + \epsilon$ como u_{i+1} — isto é, se fazemos $\epsilon = \Delta u = u_i - u_{i+1}$ — a aproximação vira isto aqui: $g(u)\big|_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} \approx g'(u_i)\Delta u$; e se reescrevemos $g'(u_i)$ como $\frac{dg}{du}(u_i)$, temos $g(u)\big|_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} \approx \frac{dg}{du}(u_i)\Delta u = \frac{dg}{du}\Delta u$. Vamos reescrever isto grande,

$$g(u)\big|_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} \quad \approx \quad \frac{dg}{du}\Delta u$$

porque agora vamos querer fazer algo parecido com $g(u(x))\big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}}$ também, e isto vai envolvee um detalhe a mais: a regra da cadeia. Lá vai:

$$\begin{array}{rcl}
g(u(x))\big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} & \approx & (\frac{d}{dx}g(u(x_i)))\Delta x \\
& = & (g'(u(x_i))u'(x_i))\Delta x \\
& = & (\frac{dg}{du}(u(x_i))\frac{du}{dx}(x_i))\Delta x \\
& = & \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}\Delta x
\end{array}$$

Agora vamos fazer mais aproximações: definindo $\Delta g := u_{i+1} - g_i = g(u_{i+1}) - g(u_i)$ do mesmo modo que definimos Δx e Δu, temos:

$$\begin{array}{rcccccc}
\frac{du}{dx} & = & \frac{du}{dx}(x_i) & \approx & \frac{u_{i+1}-u_i}{x_{i+1}-x_i} & = & \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
\frac{dg}{du} & = & \frac{dg}{du}(u_i) & \approx & \frac{u_{i+1}-g_i}{u_{i+1}-u_i} & = & \frac{\Delta g}{\Delta u} \\
\frac{dg}{dx} & = & \frac{dg}{dx}(x_i) & \approx & \frac{u_{i+1}-g_i}{x_{i+1}-x_i} & = & \frac{\Delta g}{\Delta x}
\end{array}$$

E agora repare: com isto vemos que cada linha do retângulo à esquerda abaixo vale aproximadamente a expressão correspondente na coluna da direita, e para as linhas de cima e de baixo, que têm tanto uma integral quanto uma diferença, vimos dois argumentos diferentes para justificar as aproximações...

$$\begin{array}{ccccc}
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \frac{dg}{dx}\,dx & = & g\big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} & & \frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x \\
\| & & \| & & \| \\
\int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}\,dx & & \| & & \frac{\Delta g}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x \\
& & \| & & \| \\
\int_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} \frac{dg}{du}\,du & = & g\big|_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} & & \frac{\Delta g}{\Delta u}\Delta u
\end{array}$$

Todas as oito expressões no diagrama acima dependem do i — as do retângulo explicitamente, as da coluna da direita implicitamente ($\Delta u = u_{i+1} - u_i$, etc). Nós tínhamos começado com um intervalão, e aí dividimos ele em intervalinhos e passamos a olhar só para um intervalinho; agora vamos voltar ao intervalão:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g'(u)\,du & = & \sum_{i=0,\ldots,n-1} \int_{u=u_i}^{u=u_{i+1}} g(u)\,du \\
& \approx & \sum_{i=0,\ldots,n-1} \frac{\Delta g}{\Delta u}\Delta u \\
& = & \sum_{i=0,\ldots,n-1} \Delta g \\
& = & g_n - g_0 \\
& = & g(u(x_n)) - g(u(x_0)) \\
& = & g(u(b)) - g(u(a))
\end{array}$$

(Incompleto - revisar)