MATEMÁTICA DISCRETA
PURO - UFF
3/abril/2009

As regras de <u>Dedução Natural</u> (proposicional) são estas aqui (e só!):

$$\dfrac{P \quad Q}{P\land Q}\land I \qquad \dfrac{P\land Q}{P}\land E_1 \qquad \dfrac{P\land Q}{Q}\land E_2$$

$$\dfrac{P}{P\lor Q}\lor I_1 \qquad \dfrac{Q}{P\lor Q}\lor I_2 \qquad \dfrac{Q\lor R \quad \begin{matrix}P\ [Q]^1\\ \vdots \\ S\end{matrix} \quad \begin{matrix}P\ [R]^1\\ \vdots\\ S\end{matrix}}{S}\lor E;1$$

$$\dfrac{\begin{matrix}P\ [Q]^1\\ \vdots \\ R\end{matrix}}{Q\to R}\to I;1 \qquad \dfrac{P \quad P\to Q}{Q}\to E$$

$$\dfrac{P}{\top}\top I$$

$$\dfrac{\bot}{P}\bot E$$

$$\dfrac{P}{\neg\neg P}\neg\neg I \qquad \dfrac{P \quad \neg P}{\bot}\neg E \qquad \dfrac{\neg\neg P}{P}\neg\neg E$$

Lembre que uma FBF (proposicional) é uma <u>tautologia</u> quando ela é verdadeira para toda atribuição... Exemplos:

P	Q	$P\land Q\to P\lor Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

⇐ É uma tautologia!

P	Q	$P\lor Q\to P\land Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

⇐ Não é uma tautologia!

Um sequente (proposicional) $\alpha, \beta, \gamma \vdash \delta$ é uma <u>tautologia</u> se em toda atribuição na qual as "hipóteses" α, β, γ são verdadeiras a "conclusão" δ é verdadeira.

Exemplo: $P\vdash P\lor Q$ é uma tautologia.

P	Q	$P\lor Q$	
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	⇐ ok
1	1	1	⇐ ok

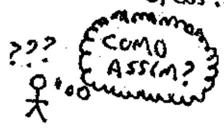
Uma árvore é uma <u>derivação em Dedução Natural</u> quando cada uma das suas barras é uma regra de Dedução Natural.

Uma árvore é uma <u>derivação num sistema dedutivo $\mathbf{S}$</u> quando cada uma das suas barras é uma regra do sistema dedutivo $\mathbf{S}$.

O livro da Judith Gersting define um sistema dedutivo com um monte de regras que não são as de Dedução Natural — por exemplo:

$$\dfrac{P\to Q \quad Q\to R}{P\to R}SH$$

As regras do sistema do livro são todas "admissíveis" - podemos acrescentá-las às regras de Dedução Natural, e aí obtemos um sistema com mais regras no qual só conseguimos derivar sequentes tautológicos...



Fato nº 1: Cada derivação num sistema cujas regras são todas admissíveis é uma "prova" de um sequente tautológico.

$$\dfrac{\dfrac{P\land Q}{P} \quad \dfrac{\dfrac{P\land Q}{Q}\quad Q\to R}{R}}{P\land R}$$

é uma prova de $P\land Q, Q\to R\vdash P\land R$

Fato nº 2: Todo sistema com regras que não são admissíveis "prova" sequentes não-tautológicos. Exemplo: $\dfrac{Q\to R}{Q}$ não é admissível

Matemática Discreta
PURO - UFF
3/abril/2009

Dedução Natural -
Regras com descargas

Uma subárvore de uma derivação também é uma derivação - por exemplo, em

$$\dfrac{\dfrac{P\land Q}{P} \qquad \dfrac{\dfrac{P\land Q}{Q} \qquad Q\to R}{R}}{P\land R}$$

a parte envolvida é uma prova de

$P\land Q, R \vdash P\land R$.

As regras com descargas eliminam ("descarregam") as hipóteses entre colchetes. Por exemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\land Q]^1}{P} \qquad \dfrac{\dfrac{[P\land Q]^1}{Q} \qquad Q\to R}{R}}{P\land R}}{P\land Q\to P\land R}\to I;1$$

prova $Q\to R \vdash P\land Q \to P\land R$.

Abaixo da barra "$\to I;1$" as hipóteses "$[P\land Q]^1$" "não são mais hipóteses"...

Repare que a barra "$\to I;1$" funciona assim:

$$\dfrac{Q\to R,\ P\land Q \vdash P\land R}{Q\to R \vdash P\land Q\to P\land R}\to I;1$$

(Exercício: pegue alguns casos de uso da regra "$\to I$" e verifique ela "recebe um sequente tautológico" - acima da barra - e "produz um outro sequente tautológico" - abaixo da barra).

A regra $\lor E$ pega dois sequentes tautológicos e produz um novo sequente tautológico...

$$\dfrac{P\lor Q \qquad \dfrac{[P]^1}{P\lor R} \qquad \dfrac{\dfrac{[Q]^1 \quad Q\to R}{R}}{P\lor R}}{P\lor R}\lor E;1$$

$$\dfrac{P\vdash P\lor R \qquad Q, Q\to R\vdash P\lor R}{P\lor Q,\ Q\to R\vdash P\lor R}\lor E$$