... MUDANÇAS EM GA NESTE SEMESTRE:

- DESTA VEZ VAMOS COMEÇAR REAPRENDENDO A FAZER AS CONTAS COM MATRIZES E VETORES QUE EM TEORIA SÃO ENSINADAS NO ENSINO MÉDIO
- VAMOS VER MUITOS MODOS DE VERIFICAR CONTAS E DE CORRIGIR EXERCÍCIOS EM DUPLA (PORQUE NÃO TEMOS MONITOR DE GA!)

POR ENQUANTO VAMOS USAR ESTES TRÊS TIPOS DE OBJETOS:

- NÚMEROS
- VETORES DE COMPRIMENTO 2
- MATRIZES 2×2

LEMBRE QUE ALGUMAS OPERAÇÕES "SÃO VÁLIDAS", OUTRAS "DÃO ERRO"...

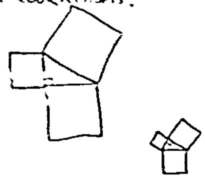
$+$	2	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$
2	4	ERRO	
$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$			

DIREITA

$\cdot$	2	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$
2	4	$\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10&12\\14&16\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	?	ERRO	ERRO
$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$	?	$\begin{pmatrix}39\\53\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}67&78\\91&106\end{pmatrix}$

ESQUERDA

COMO FAZER GEOMETRIA SEM COORDENADAS?

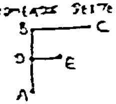


COMO FAZER GEOMETRIA:

1) COM COORDENADAS,
2) COM MUITAS COORDENADAS.

EXERCÍCIO (EM DUPLA):

- DESENHE UM "F" COM VÉRTICES NOMEADOS DESTE JEITO:



NA POSIÇÃO QUE VOCÊ QUISER,

- COMPLETE ESTA TABELA:

	x	y	z	w
A				
B				
C				
D				
E				

- CORRIJA O DO COLEGA.

MUDANÇAS DE COORDENADAS, COMO A QUE ACABAMOS DE FAZER ENTRE (x,y) E (z,w), TÊM ALGUMA COISA A VER COM OPERAÇÕES COM MATRIZES E VETORES...

VAMOS VER ISTO AOS POUCOS.

1) PARA CADA UM DOS 5 PONTOS DA SUA TABELA, DIGA SE ESTA RELAÇÃO É VERDADEIRA OU FALSA:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$$

2) FAÇA O MESMO PARA ESTA:

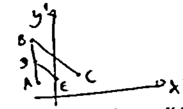
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$$

[CONFIRA COM OS COLEGAS].

3) DIGAMOS QUE ISTO SEMPRE VALE:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3\\y\end{pmatrix}.$$

ENTÃO PARA CADA PONTO DA SUA TABELA VOCÊ PODE CALCULAR AS "COORDENADAS x' E y'" DELE, E COM ELAS VOCÊ PODE DESENHAR SEU F EM OUTRO PLANO — DIGAMOS:



DESENHE O SEU F NO PLANO (x',y').

4) IDEM PARA:

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$$

DESENHE O SEU F NO PLANO (x'',y'').

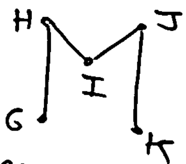
5) IDEM PARA:

$$\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

O OBJETIVO DESTA AULA E DA PRÓXIMA É A GENTE APRENDER DOIS JEITOS DE FAZER ESTAS MUDANÇAS DE COORDENADAS, QUE TÊM QUE SER EQUIVALENTES, ISTO É, DAR OS MESMOS RESULTADOS: UM JEITO "ALGÉBRICO", QUE ACABAMOS DE VER, E UM "GEOMÉTRICO".

PRA CADA UMA DAS MUDANÇAS DE COORDENADAS ③, ④ E ⑤ VOCÊ JÁ DEVE TER UMA HIPÓTESE SOBRE COMO ELAS FUNCIONAM "GEOMETRICAMENTE":

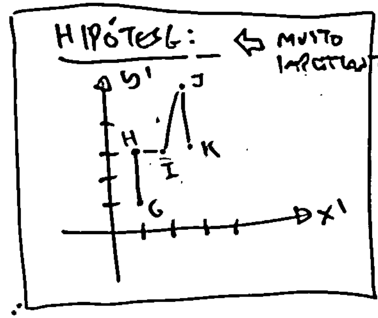
AGORA VOCÊ VAI DESENHAR UM "M" EM $\mathbb{R}^2$, COM VÉRTICES NESTAS POSIÇÕES:



FAÇA UMA TABELA COM AS COORDENADAS X, Y DE CADA UM DESTES 5 PONTOS E FAÇA UM **DESENHO** COM A SUA **HIPÓTESE** DE COMO VOCÊ ACHA QUE O M VAI FICAR NOS PLANOS (x',y'), (x'',y''), (x''',y'''),

SEM FAZER AS CONTAS.

EXEMPLO:



DEPOIS DISSO

VOCÊS VÃO CONFERIR AS CONTAS (ONDE PRECISAR).

: TIREM TODAS AS DÚVIDAS A RESPEITO DISTO

PORQUE NA PRÓXIMA AULA AS CONTAS VÃO PIORAR, E VAMOS TER COISAS COMO:

$$\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

DICA: CADA EXERCÍCIO PODE SER RESOLVIDO DE VÁRIOS JEITOS, UNS MAIS RÁPIDOS, OUTROS MAIS SEGUROS...

TREINE ESCREVER AS SUAS RESOLUÇÕES INDICANDO ONDE VOCÊ TEM MENOS CERTEZA DO QUE VOCÊ ESTÁ FAZENDO ("HIPÓTESE") — PRA VOCÊS PODEREM ESTUDAR EM GRUPO, E PRA VOCÊS PODEREM USAR O TRUQUE DO "DEPOIS".

Vamos começar fazendo uma revisão (😐) do que vocês viram de matrizes e vetores no ensino médio.

Por enquanto vamos usar só estes três tipos de objetos:

- números
- vetores de tamanho 2
- matrizes 2×2

Em GA a gente geralmente usa uma notação que distingue

$(3,4)$ ← ponto

e

$\overrightarrow{(3,4)}$ ← vetor;

mas vamos deixar isto pra daqui a algumas aulas.

A notação $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$ é a "notação de Álgebra Linear" (na qual pontos são representados da mesma forma que vetores).

A gente sabe somar e multiplicar estes objetos em alguns casos; os outros são erro.

$+$	2	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$
2	4	erro	
$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$			

direita

$\cdot$	2	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$
2			
$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$			

esquerda

Dica: vocês podem escrever coisas que vocês vão verificar (depois, ou com colegas) escrevendo "hipótese".

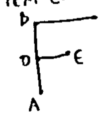
Em Geometria Clássica a gente faz tudo sem coordenadas — e em geral sem poder medir comprimentos (!!!) — mas podendo falar de proporções — por exemplo "a distância AB é o dobro da distância BC". Não podemos nem falar em "horizontal e vertical"!

podem ser a mesma figura (!!!)... Como assim?????

Como fazer Geometria

- com coordenadas
- com muitas coordenadas.

(1) Desenhe um F no qual os vértices têm estes nomes:



e faça uma tabela com as coordenadas x, y, z, w dos 5 pontos:

	x	y	z	w
A				
B				
C				
D				
E				

(2) Corrijam o de um colega.

Os valores de x, y, z, w de cada ponto são relacionados de alguma forma — qual?

Fato (vamos entender aos poucos): mudanças de coordenadas têm a ver com operações com matrizes e vetores.

(3) Aumente a sua tabela escrevendo para cada ponto os valores de:

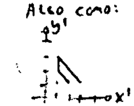
- $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$

(4) Corrijam o de um colega.

(5) Digamos que sempre vale

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Com isto cada ponto passa a ter também coordenadas x' e y', e você pode representar o seu F no plano (x',y') — pode dar algo como:



(6) Faça o mesmo para:

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

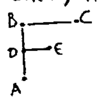
(7) Faça o mesmo para:

$$\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Hoje:

Continuação do exercício da aula passada!

Você vai improvisar um quadriculado no seu papel, desenhar um "F" com vértices com coordenadas inteiras, assim:



(1) Se sempre vale $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, aumente a sua tabela de coordenadas,

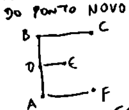
	x	y	x'	y'
A				
B				
C				
D				
E				

incluindo as novas coordenadas x' e y';

Aí desenhe os pontos A, B, C, D, E no plano (x', y').

(2) Em todos os exemplos que vamos ver hoje dá pra transformar o "F" num "E" sem fazer contas.

Mais precisamente: você pode fazer uma hipótese sobre as coordenadas x', y' do ponto novo,



e depois conferir a sua hipótese "geométrica" calculando as coordenadas x', y', do ponto F.

(3) Corrija o exercício de um colega.

(4) Faça a mesma coisa para $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

(5) Corrija o exercício de um colega.

(6) Faça o mesmo para $\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

(7) Corrija o exercício de um colega.

(8) Faça o mesmo para $\begin{pmatrix}x''''\\y''''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

(9) Corrija o exercício de um colega.

(10) Faça o mesmo para $\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

(11) Corrija o exercício de um colega.

Desenhe um "M" com coordenadas inteiras e vértices nomeados desta forma,

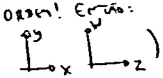
Em outro lugar do plano, e: (1'), (2'), ..., (11'):

Faça uma (boa) hipótese - "gráfica" - sobre onde o M vai ficar nos planos (x', y'), (x'', y''), etc.

Verifique se a sua hipótese está certa fazendo as contas para alguns pontos.

Corrija os "M"s dos colegas só a partir dos desenhos.

(Obs: em matemática quando a gente precisa de letras depois de x e y a gente normalmente usa z e w - nesta ordem! Então:



)

Nos exercícios (1), ..., (11), (1'), ..., (11') você descobriu o "significado geométrico" de certas transformações: somar um vetor, multiplicar por 2 e por -1, multiplicar por $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, etc.

Agora você vai fazer o mesmo para as transformações mais complicadas abaixo, só que você é que vai ter que inventar os nomes das variáveis novas.

(12) $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(14) $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(15) $\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$

(18) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

NA AULA PASSADA VOCÊS COMEÇARAM A DESCOBRIR - SOZINHOS - QUAL ERA O "SIGNIFICADO GEOMÉTRICO" DE OPERAÇÕES COMO ESTA:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ldots$$

NÓS COMEÇAMOS COM DUAS FIGURAS - UM F E UM M - E DESCOBRIMOS QUAIS ERAM AS "IMAGENS" DELAS POR ESTA TRANSFORMAÇÃO.

("IMAGEM" É UM TERMO TÉCNICO).

AGORA VAMOS VER O QUE ACONTECE COM OS EIXOS.

OS EIXOS SÃO:

$e_H = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$e_V = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

EM BREVE!

REPARE QUE e_H E e_V SÃO <u>RETAS</u>, E TÊM INFINITOS PONTOS...

EXERCÍCIOS:

a) REPRESENTE EM $\mathbb{R}^2$ VÁRIOS PONTOS TIPO:

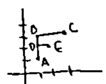
$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \ldots,$

DO EIXO HORIZONTAL, E VÁRIOS PONTOS TIPO:

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \ldots$

DO EIXO VERTICAL.

b) SEJAM A, B, C, D, E OS VÉRTICES DESTE F:



REPRESENTE EM $\mathbb{R}^2$ $f(A), f(B), \ldots, f(E)$.

c) SEJA:

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

REPRESENTE EM $\mathbb{R}^2$

$g(e_H)$,

$g(e_V)$,

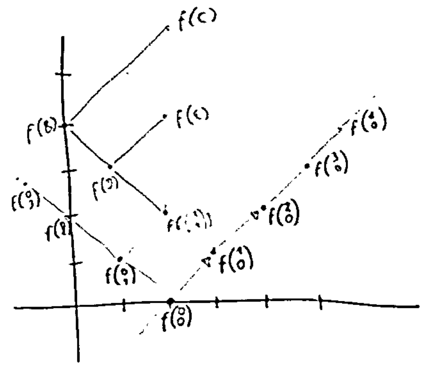
$g(A), \ldots, g(E)$.

d) É POSSÍVEL RESOLVER UMA QUESTÃO DESTAS CALCULANDO APENAS $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ E $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, E A PARTIR DISTO DESCOBRINDO A IMAGEM DO EIXO HORIZONTAL; DEPOIS SÓ A PARTIR DE $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ DÁ PRA DESCOBRIR A IMAGEM DO EIXO VERTICAL - E A PARTIR DISTO DÁ PRA ENCONTRAR $g(A), \ldots, g(E)$ <u>SEM FAZER CONTAS</u>.

ENCONTRE JUNTO COM OS SEUS COLEGAS O MODO DE FAZER ISTO.

(ESTUDAR UMA EXPLICAÇÃO DISTO: ×2.

DESCOBRIR EM GRUPO: /2.)



LISTA DE COISAS QUE EU ESTOU FINGINDO QUE SÃO FÁCEIS:

- $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- $g(e_H)$
- $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

NOTAÇÃO PARA SUBSTITUIÇÃO:

"QUANDO $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ TEMOS

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-4 \\ 3+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$"

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$
- $g(\{A,B,C\}) = \{g(A), g(B), g(C)\}$

Hoje: mais métodos olhométricos!

Na última aula vocês entenderam - por si mesmos :) - o que algumas transformações como esta

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

fazem...

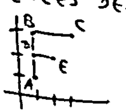
Agora vamos ver o que elas fazem com os eixos

$e_H = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$e_V = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

e com algumas retas horizontais e verticais...

Sejam A, B, C, D, E os vértices deste F:



Terminologia: $f(x)$ é a "imagem" do ponto x pela função f;

a "imagem" de um conjunto de três pontos $\{x_1, x_2, x_3\}$ por f é $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$.

Exercício:

Seja,

$$f\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

a) Represente graficamente $f(A), f(B), f(C), f(D), f(E)$

b) Represente graficamente a imagem por f de vários pontos de e_H e de e_V.

c) Seja

$$g\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Represente graficamente $g(e_H), g(e_V), g(A), \ldots, g(E)$.

d) Dá pra encontrar $f(e_H)$ só a partir de $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$ e $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$; também dá pra encontrar $f(e_V)$ só a partir de $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$ e $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, e a partir disto dá pra encontrar $f(A), f(B), \ldots, f(E)$ sem fazer nenhuma conta.

Descubra como (em grupo!)

e) Faça o mesmo pra transformação g.

Dica:

Como fazer perguntas boas?

Exemplo:

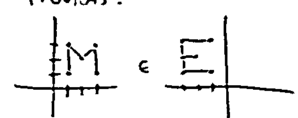
Se $A_H = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ então $f(A_H) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$?

Tente fazer pros seus colegas perguntas que eles entendam rápido e possam responder "sim" ou "não" rápido!

Pra casa:

f) Aprenda a calcular "olhometricamente" $f\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$ para quaisquer valores de a e b, pra poder representar a imagem de outras figuras rapidamente;

g) Represente graficamente a imagem por f e a imagem por g destas figuras:



h) Estas transformações vão nos dar novos sistemas de coordenadas.

Por exemplo, $g\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e algum $b \in \mathbb{R}$ - quais?

Estes a e b vão ser as coordenadas do ponto $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ no sistema de coordenadas dado por g...

(, importante!)

Agora vamos usar esta idéia para definir sistemas de coordenadas.

Vamos definir precisamente $\Sigma, \Sigma_C, \Sigma'$, etc. depois — vamos começar com esta definição:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 99 \\ 200 \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 99 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 99-200 \\ 99+200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99 \\ 299 \end{pmatrix}$$

(a) Represente em $\mathbb{R}^2$ $A_\Sigma, B_\Sigma, C_\Sigma, D_\Sigma, E_\Sigma$.

Exemplo:

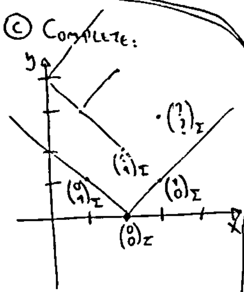
$$A_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Represente em $\mathbb{R}^2$:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma,$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_\Sigma$

(c) Complete:



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

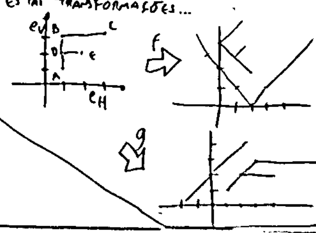
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Na aula passada vocês aprenderam a pegar uma transformação como, por exemplo,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e calcular a "imagem" de figuras simples por estas transformações...



Na 1ª aula — a que foi da semana do trote — nós vimos como cada ponto de $\mathbb{R}^2$ podia ter várias coordenadas... por exemplo, se

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

então:

x	y	x'	y'
0	0	2	0
1	0	3	1
2	0	4	2
0	1	1	1
0	2	0	2
1	1	2	2

e dá pra desenhar, no mesmo plano, eixos x, y, x', y'...

Repare:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

temos

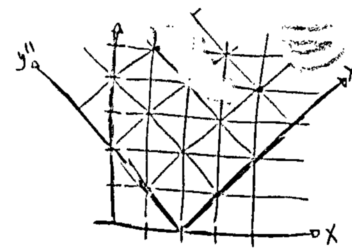
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'-2 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercício (☺)

Desenhe no plano (x, y) os eixos x' e y' no caso em que a relação entre x, y, x', y' é dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

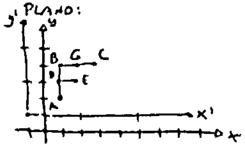


Errado! Porque $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ não obedece $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$...

27/SET/2013 $\boxed{A}$

Hoje: Sistemas de coordenadas no mesmo plano (afinal!)

Vamos considerar este caso, no qual os eixos (x,y) e (x',y') estão representados no mesmo plano:



O ponto E tem coordenadas:

$x=2$
$y=3$
$x'=1$
$y'=1$

E a "origem (x',y')" tem coordenadas:

$x=-1$
$y=1$
$x'=0$
$y'=0$...

A relação entre x,y,x',y' é:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

Repare que com esta relação é fácil começar com x' e y' e produzir o x e o y correspondentes...

O inverso é um pouco mais complicado.

Exercício:

(a) Complete:

Ponto	x	y	x'	y'
A				
B				
C				
D				
E	2	3	1	1
	0	0	0	0

Um modo da gente lidar com sistemas de coordenadas formalmente é usar símbolos como $\Sigma, \Sigma', \Sigma_c, \ldots$ para denotar sistemas de coordenadas...

Σ_c = coordenadas canônicas (x,y)

Σ' = coordenadas (x',y')

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{\Sigma'}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Aí escrevemos:

$$E=(2,3)=(2,3)_{\Sigma_c}=(1,1)_{\Sigma'}$$

Vetores

Na notação de álgebra linear temos:

$$D=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE}=E-D=\begin{pmatrix}2-1\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Mas vamos usar muito uma outra notação — a "notação de GA" — na qual pontos e vetores são distintos

(e confundir pontos e vetores é pecado mortal)

Na notação de GA,

$$D=(1,3)\quad E=(2,3)$$

$$\overrightarrow{DE}=E-D=(2,3)-(1,3)=\overrightarrow{(2-1,3-3)}=\overrightarrow{(1,0)}$$

Porquê?!!

Porque quando a gente muda de sistema de coordenadas pontos e vetores mudam de forma diferente...

Repare que $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{(1,0)}$

(um deslocamento de uma unidade para a direita).

E $\overrightarrow{DD}=\overrightarrow{(0,0)}$.

Exercício:

(b) Complete:

$D=(\ ,\ )_{\Sigma'}$
$E=(1,1)_{\Sigma'}$
$B=(\ ,\ )_{\Sigma'}$
$G=(\ ,\ )_{\Sigma'}$
$C=(\ ,\ )_{\Sigma'}$

(c) Discuta com os seus colegas como organizar suas contas de forma que cada passo tenha uma justificativa clara!

Repare que a definição de $\overrightarrow{AB}$ é bem simples...

$$\overrightarrow{(x,y)(z,w)}=\overrightarrow{(z-x,w-y)}$$

Queremos ter algo parecido para Σ' — tipo isto:

$$\overrightarrow{(a,b)_{\Sigma'}(c,d)_{\Sigma'}}=\overrightarrow{(c-a,d-b)}_{\Sigma'}$$

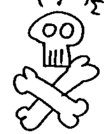
Mas repare:

$D=(1,3)$

$\overrightarrow{DD}=\overrightarrow{(1-1,3-3)}=\overrightarrow{(0,0)}$

$D=(\frac{2}{3},1)_{\Sigma'}$

Mas $(0,0)_{\Sigma'}=(-1,1)$...



Truque (vai parecer estranho no início, até vocês terem prática)...

Escrevendo

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{\Sigma'}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

em notação de GA,

$(a,b)_{\Sigma'}=(-1,1)$ ⇦ "origem"
$+\ a\overrightarrow{(3,0)}$ ⇦ 1ª coluna da matriz
$+\ b\overrightarrow{(0,2)}$ ⇦ 2ª coluna

$\overrightarrow{(c,d)}_{\Sigma'}=c\overrightarrow{(3,0)}$ ⇦ 1ª coluna
$+\ d\overrightarrow{(0,2)}$ ⇦ 2ª coluna

Sem somar a origem!

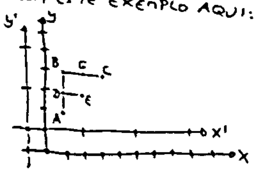
Próxima aula: muitas definições!!

27/set/2013 B

A página do curso já tem um PDF com as fotos dos quadros! (http://angg.twu.net/ e clique em GA na barra de navegação)

Hoje: sistemas de coordenadas no mesmo plano! (afinal)

Vamos trabalhar com este exemplo aqui:



Exercício:

(a) Complete (usando o olhômetro):

Ponto	x	y	x'	y'
A				
B				
C				
D				
E	2	3	1	1
G				
	-1	1	0	0

A relação entre x, y, x', y' é esta:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

Repare que é muito fácil começar com valores para x' e y' e aí calcular x e y... mas o contrário é mais difícil.

Um modo de formalizar sistemas de coordenadas é dar nomes como $\Sigma_C, \Sigma, \Sigma', \ldots$ para cada sistema de coordenadas e definir como transformar pontos nos sistemas de coordenadas novos para as coordenadas canônicas (Σ_C)...

Defs:

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{\Sigma_C} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_{\Sigma'} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Ou seja:

Vetores

Às vezes vamos usar a notação de Álgebra Linear, que não distingue pontos de vetores, e às vezes a "notação de GA", na qual confundir pontos e vetores é pecado mortal (!!!)

Def: $\overrightarrow{AB}$ é o deslocamento de A para B.

Formalmente: $\overrightarrow{(x,y)(z,w)} = \overrightarrow{(z-x, w-y)}$
$= (z,w) - (x,y)$

Repare que: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{(1,0)}$

e que: $\overrightarrow{DD} = \overrightarrow{(0,0)}$

Na notação de GA temos:

$(a,b)_{\Sigma'} = (-1,1)$ ⇐ "origem"
$+ a\overrightarrow{(3,0)}$ ⇐ 1ª coluna da matriz
$+ b\overrightarrow{(0,2)}$ ⇐ 2ª coluna

Mas pras fórmulas ficarem fáceis de usar vamos ter que ter:

$$\overrightarrow{(c,d)}_{\Sigma'} = c\overrightarrow{(3,0)} + d\overrightarrow{(0,2)} \quad (\star)$$

Sem somar a origem! Porquê?

(b) Complete:

$A = (\ , \ )_{\Sigma'}$
$B = (\ , \ )_{\Sigma'}$
$C = (\ , \ )_{\Sigma'}$
$D = (\ , \ )_{\Sigma'}$
$E = (\ , \ )_{\Sigma'}$
$G = (\ , \ )_{\Sigma'}$

Queremos poder usar esta fórmula aqui:

$$\overrightarrow{(a,b)_{\Sigma'}(c,d)_{\Sigma'}} = \overrightarrow{(c-a, d-b)}_{\Sigma'}$$

Exercício:

(c) Arrume as suas contas pro exercício (b) de forma que cada passo seja fácil de verificar.

Vamos fingir, temporariamente, que a definição para $\overrightarrow{(c,d)}_{\Sigma'}$ é:

$$\overrightarrow{(c,d)}_{\Sigma'} = \overrightarrow{(-1,1)} + c\overrightarrow{(3,0)} + d\overrightarrow{(0,2)} \quad (\star\star)$$

(d) Calcule $\overrightarrow{(0,0)}_{\Sigma'}$ usando ($\star$).

(e) Calcule $\overrightarrow{(0,0)}_{\Sigma'}$ usando ($\star\star$).

(f) Complete, usando ($\star$):

$\overrightarrow{EE} = (\ , \ )_{\Sigma'}$

(g) Complete, usando ($\star\star$):

$\overrightarrow{EE} = (\ , \ )_{\Sigma'}$.

Truque: "Hipótese"

Dica: O que é $(99, 200)_{\Sigma'}$?

Aula que vem: muitas definições de operações com vetores e pontos!

2/out/2013 A

Hoje: um monte de definições!

A partir de agora vamos usar a notação de GA, na qual pontos e vetores são coisas completamente diferentes...

$(3,4)$ ⇐ isto é um ponto (em $\mathbb{R}^2$).

$\overrightarrow{(3,4)}$ ⇐ isto é um vetor (em $\mathbb{R}^2$).

Defs:

ⓐ $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}=(a+c,b+d)$

ⓑ $\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)}=\overrightarrow{(a+c,b+d)}$

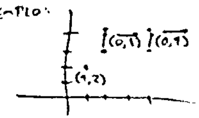
ⓒ $(a,b)-(c,d)=\overrightarrow{(a-c,b-d)}$

ⓓ $k\overrightarrow{(a,b)}=\overrightarrow{(ka,kb)}$

Porquê? Como assim???

Idéia: graficamente, pontos são pontos, e vetores são deslocamentos.

Exemplo:



Vetores são representados como setas - começando em qualquer lugar!!

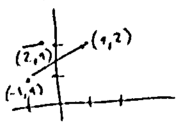
A primeira definição diz:

$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}=(a+c,b+d)$

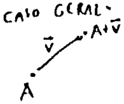
Caso particular:

$(-1,1)+\overrightarrow{(2,1)}=(1,2)$

Graficamente:



Caso geral:



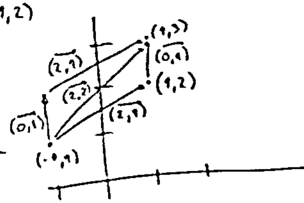
Regra do paralelogramo

Caso particular:

$((-1,1)+\overrightarrow{(2,1)})+\overrightarrow{(0,1)}=$

$((-1,1)+\overrightarrow{(0,1)})+\overrightarrow{(2,1)}=$

$(-1,1)+(\overrightarrow{(0,1)}+\overrightarrow{(2,1)})$



Caso geral:

☆ $(A+\vec{v})+\vec{w}=$

$(A+\vec{w})+\vec{v}=$

$A+(\vec{v}+\vec{w})$

Como provar que isto é verdade? ("Teorema!...")

☆☆ $((A_1,A_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)})+\overrightarrow{(w_1,w_2)}=$

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(w_1,w_2)})+\overrightarrow{(v_1,v_2)}=$

$(A_1,A_2)+(\overrightarrow{(v_1,v_2)}+\overrightarrow{(w_1,w_2)})=$

$(A_1+v_1+w_1,A_2+v_2+w_2)$

Existe um método pra provar propriedades deste tipo:

Expandir as definições.

Repare que nas defs ⓐ,ⓑ,ⓒ,ⓓ lá à esquerda a notação nova sempre aparece à esquerda do "=", e a "expansão" dela aparece à direita...

"Expandir as definições" quer dizer trocar cada ocorrência de algo "novo" por algo "mais velho" (mais básico, mais primitivo...)

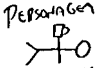
Exemplo:

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)})+\overrightarrow{(w_1,w_2)}\overset{\text{(por ⓐ)}}{=}$

$(A_1+v_1,A_2+v_2)+\overrightarrow{(w_1,w_2)}\overset{\text{(por ⓐ)}}{=}$

$(A_1+v_1+w_1,A_2+v_2+w_2)$

Personagem importante:



Leitor de ressaca.

Todas as nossas demonstrações tem que ficar claras pro leitor de ressaca.

Obs: a gente também tem que deixar claro qual é o "tipo" de cada expressão (número, ponto, vetor, etc).

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{A_1}_{N},\underbrace{A_2}_{N})}_{P}+\underbrace{\overrightarrow{(\underbrace{v_1}_{N},\underbrace{v_2}_{N})}}_{V})}_{P}+\underbrace{\overrightarrow{(\underbrace{w_1}_{N},\underbrace{w_2}_{N})}}_{V}}_{P}$$

Quando a gente usa variáveis ou a gente tem que dizer explicitamente o que é número, ponto, vetor, etc - por exemplo:

$A_1,A_2,v_1,v_2,w_1,w_2\in\mathbb{R}$

$A\in\mathbb{R}^2$,

$\vec{v},\vec{w}$ vetores em $\mathbb{R}^2$

⇑ (cadê o "$\in$"???)

Em geral a gente tenta usar nomes pras variáveis que deixem implícito o que elas são...

(A gente tem que aprender as convenções).

Como provar formalmente que as três igualdades de ☆☆ são verdade?

Expandindo as definições!

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)})+\overrightarrow{(w_1,w_2)}\overset{\text{(por ⓐ)}}{=}$

$(A_1+v_1,A_2+v_2)+\overrightarrow{(w_1,w_2)}\overset{\text{(por ⓐ)}}{=}$

$((\underbrace{A_1}_{N}+\underbrace{v_1}_{N})+\underbrace{w_1}_{N},(\underbrace{A_2}_{N}+\underbrace{v_2}_{N})+\underbrace{w_2}_{N})=$ (porque adição de números reais é associativa e comutativa...)

$(A_1+v_1+w_1,A_2+v_2+w_2)$

Exercício:

Demonstre (algebricamente) que:

① $\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)}=\overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(a,b)}$

② $(\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)})+\overrightarrow{(e,f)}=$
$\overrightarrow{(a,b)}+(\overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(e,f)})$

③ $k(\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)})=k\overrightarrow{(a,b)}+k\overrightarrow{(c,d)}$

④ $(k+k')\overrightarrow{(a,b)}=k\overrightarrow{(a,b)}+k'\overrightarrow{(a,b)}$

(15 mins)

2/OUT/2013 A

HOJE: UM MONTE DE DEFINIÇÕES!

A PARTIR DE AGORA VAMOS USAR A NOTAÇÃO DE GA, NA QUAL PONTOS E VETORES SÃO COISAS COMPLETAMENTE DIFERENTES...

$(3,4)$ ⇐ ISTO É UM PONTO (EM $\mathbb{R}^2$),

$\overrightarrow{(3,4)}$ ⇐ ISTO É UM VETOR (EM $\mathbb{R}^2$).

DEFS:

ⓐ $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (a+c,b+d)$

ⓑ $\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$

ⓒ $(a,b)-(c,d) = \overrightarrow{(a-c,b-d)}$

ⓓ $k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

① QUEREMOS VER QUE:

$$\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(a,b)}.$$

TEMOS:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} &= \overrightarrow{(a+c,b+d)} && \text{(POR ⓑ)}\\ &= \overrightarrow{(c+a,d+b)} && \text{(POR COMUTATIVIDADE DA ADIÇÃO DE REAIS)}\\ &= \overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(a,b)} && \text{(POR ⓑ)}\end{aligned}$$

TRUQUE: ESTA SÉRIE DE IGUALDADES É MONTADA A PARTIR DE DUAS SÉRIES DE IGUALDADES COLADAS...

$$\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,b+d)}$$

$$\overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(c+a,d+b)}$$

OBS: LEMBREM QUE QUANDO A E B SÃO MATRIZES NÃO PODEMOS DIZER QUE $AB=BA$ - ISSO VAI SER VERDADE RARAMENTE!

DEPOIS QUE DEMONSTRAMOS ①

AÍ NÓS PODEMOS USAR QUE A SOMA DE VETORES É COMUTATIVA... PODEMOS USAR "POR ①" COMO JUSTIFICATIVA EM IGUALDADES!

Hoje:

Montes de definições!

Vamos começar a usar a notação de GA, na qual

$(3,4)$ ⇐ isto é um ponto (de $\mathbb{R}^2$) e

$\overrightarrow{(3,4)}$ ⇐ isto aqui é um vetor (em $\mathbb{R}^2$)...

E estas são algumas das operações que podemos fazer com eles:

ⓐ $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)} = (a+c,\ b+d)$

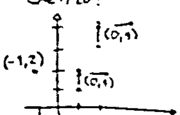
ⓑ $\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c,\ b+d)}$

ⓒ $(a,b)-(c,d) = \overrightarrow{(a-c,\ b-d)}$

ⓓ $k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$

Graficamente, pontos são pontos (!) e vetores são deslocamentos

Exemplo:



O mesmo vetor pode ser desenhado em várias posições!

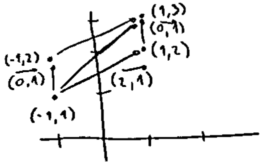
Regra do paralelogramo

Caso particular:

$((-1,1)+\overrightarrow{(2,1)})+\overrightarrow{(0,1)} =$

$((-1,1)+\overrightarrow{(0,1)})+\overrightarrow{(2,1)} =$

$(-1,1)+(\overrightarrow{(0,1)}+\overrightarrow{(2,1)}) = (1,3)$



Caso geral:

$(A+\vec{v})+\vec{u} =$

$(A+\vec{u})+\vec{v} =$

$A+(\vec{w}+\vec{v})$

Outro jeito:

(★) $((A_1,A_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)})+\overrightarrow{(u_1,u_2)} =$

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(u_1,u_2)})+\overrightarrow{(v_1,v_2)} =$

$(A_1,A_2)+(\overrightarrow{(u_1,v_2)}+\overrightarrow{(v_1,v_2)})$

Repare que estou afirmando que esses "="s são verdade, mas ainda não demonstrei que eles são verdade...

Um truque: expandir definições.

Repare que em cada uma das definições ⓐ,ⓑ,ⓒ,ⓓ o símbolo novo aparece à esquerda do "=", e a definição dele em termos de coisas velhas/mais básicas/mais primitivas aparece à direita...

Podemos provar as igualdades em (★), e muitas outras, expandindo definições.

Exemplo:

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)})+\overrightarrow{(u_1,u_2)} =$ (por ⓐ)

$(A_1+v_1,\ A_2+v_2)+\overrightarrow{(u_1,u_2)} =$ (por ⓐ)

$((A_1+v_1)+u_1,\ (A_2+v_2)+u_2)$

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(u_1,u_2)})+\overrightarrow{(v_1,v_2)} =$ (por ⓐ)

$(A_1+u_1,\ A_2+u_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)} =$ (por ⓐ)

$((A_1+u_1)+v_1,\ (A_2+u_2)+v_2)$

... e agora a gente quer colar estas duas sequências de igualdades numa só...

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)})+\overrightarrow{(u_1,u_2)} =$ (por ⓐ)

$(A_1+v_1,A_2+v_2)+\overrightarrow{(u_1,u_2)} =$ (por ⓐ)

$((A_1+v_1)+u_1,(A_2+v_2)+u_2) =$ pela associatividade da adição dos reais

$((A_1+u_1)+v_1,(A_2+u_2)+v_2) =$ (por ⓐ)

$(A_1+u_1,\ A_2+u_2)+\overrightarrow{(v_1,v_2)} =$ (por ⓐ)

$((A_1,A_2)+\overrightarrow{(u_1,u_2)})+\overrightarrow{(v_1,v_2)}$

Um personagem muito importante

O leitor de ritmo

A gente vai ter que escrever todas as nossas demonstrações de um jeito que o leitor de ritmo entenda.

Mais um truque: tipos.

Estamos usando números reais, pontos, vetores.

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{A_1}_{N},\underbrace{A_2}_{N})}_{P}+\underbrace{\overrightarrow{(\underbrace{v_1}_{N},\underbrace{v_2}_{N})}}_{V})}_{P}+\underbrace{\overrightarrow{(\underbrace{u_1}_{N},\underbrace{u_2}_{N})}}_{V}}_{P}$$

Obs: ou a gente diz explicitamente o tipo de cada variável –

$A_1,A_2,v_1,v_2,u_1,u_2 \in \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^2$,

$\vec{v},\vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^2$

⇑

(porque não "$\in$ ..."?)

ou a gente usa certas convenções sobre os nomes que fazem com que os tipos sejam fáceis de deduzir...

Exercício. Demonstrem ("algebricamente"):

① $(\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)})+\overrightarrow{(e,f)} = \overrightarrow{(a,b)}+(\overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(e,f)})$

② $\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)}+\overrightarrow{(a,b)}$

③ $k(\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)}) = k\overrightarrow{(a,b)}+k\overrightarrow{(c,d)}$

④ $(k+k')\overrightarrow{(a,b)} = k\overrightarrow{(a,b)}+k'\overrightarrow{(a,b)}$

(Em grupo) 20-30 mins

$\boxed{4/\text{out}/2013}\ \boxed{A}$

NA AULA PASSADA COMEÇAMOS A VER DEMONSTRAÇÕES...

AS NOSSAS DEMONSTRAÇÕES MAIS IMPORTANTES — POR ENQUANTO! — VÃO ENVOLVER DUAS IDEIAS NOVAS:

- PRODUTO INTERNO ($\to$ NORMA, COMPRIMENTO, ÂNGULO...)
- CONJUNTOS ($\to$ RETAS, SEGMENTOS...)

DEFS

$$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

ESTE "$\cdot$" É O "PRODUTO INTERNO" (ENTRE VETORES!) E "$\|\cdot\|$" É A "NORMA" (DE UM VETOR).

$\times 3$: CONJUNTOS.

JÁ VIMOS ESTA NOTAÇÃO AQUI:

$$\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

ISTO É UM DOS MODOS QUE TEMOS PRA GERAR CONJUNTOS INFINITOS.

ISTO É COMPLETAMENTE DIFERENTE DE:

$$\underbrace{\{\underbrace{\underbrace{(x,y)}_{\text{VARS}} \in \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{CONJ}}}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{y = x+1}_{\text{FILTRO}}\}}_{\text{CONJUNTO}}$$

$$\{\underbrace{\underbrace{(\underbrace{x}_{N},\underbrace{0}_{N})}_{P}}_{\text{EXPR}} \mid \underbrace{\underbrace{x}_{\text{VAR}} \in \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{CONJ}}}_{\text{GERADOR}}\}$$

$$\{\underbrace{\underbrace{2}_{N}}_{\text{EXPR}}, \underbrace{\underbrace{3}_{N}}_{\text{EXPR}}, \underbrace{\underbrace{5}_{N}}_{\text{EXPR}}\}$$

EXERCÍCIO: CALCULE E REPRESENTE GRAFICAMENTE:

ⓐ $\{(x,1) \mid x \in \{2,3,4\}\}$

ⓑ $\{(x,x+1) \mid x \in \{2,3,4\}\}$

ⓒ $\{(t,t^2) \mid t \in \{-2,-1,0,1,2\}\}$

ⓓ $\{(x,1) \mid x \in \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}\}$

ⓔ $\{(x,1) \mid x \in [2,4]\}$

DICA: EM CASO DE DÚVIDA FAÇA UMA TABELA... EXEMPLO,

x	$(x,1)$
2	$(2,1)$
3	$(3,1)$
4	$(4,1)$

IGUALDADE

$(2,3) \neq 4$ PORQUE "$(2,3)$" E "4" SÃO OBJETOS DE TIPOS DIFERENTES.

$(2,3) \neq (2,4)$ PORQUE A SEGUNDA COMPONENTE É DIFERENTE NOS DOIS.

$\{2,3\} \neq \{2,4\}$ PORQUE $\{2,3\}$ TEM UM ELEMENTO QUE NÃO PERTENCE A $\{2,4\}$.

DOIS CONJUNTOS, A E B, SÃO IGUAIS QUANDO TÊM OS MESMOS ELEMENTOS — OU, EQUIVALENTEMENTE, QUANDO TODO ELEMENTO DE A PERTENCE A B E TODO ELEMENTO DE B PERTENCE A A.

DEF (COM CARA DE MD). SE A E B SÃO CONJUNTOS,

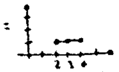
$$A = B \leftrightarrow ((\forall a \in A\ a \in B) \land (\forall b \in B\ b \in A))$$

EM CASOS SIMPLES — COMO OS QUE ESTAMOS TRATANDO AGORA — TEMOS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PRECISAS O SUFICIENTE...

EXERCÍCIOS:

① SEJAM

$A' =$ 

$A'' =$ 

MOSTRE QUE $A' \neq A''$.

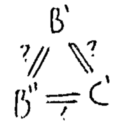
⑨ SEJAM.

$$B' = \{(0,1) + t\overrightarrow{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$B'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$$

$$C' = \{(t+1, t+2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

QUAIS DESTES CONJUNTOS SÃO DIFERENTES? PORQUÊ?



AVISOS:

- P1: QUANDO? TRAGAM UMA LISTA DE DATAS BOAS A PARTIR DE 23/OUT!
- SE ALGUÉM ESTIVER A FIM DE AJUDAR NUM PROJETO QUE ENVOLVE HTML, JAVASCRIPT, YOUTUBE E AS MANIFESTAÇÕES RECENTES, FALE COMIGO!

4/out/2013 | B

Na aula passada nós começamos a ver teoremas e demonstrações... mas os nossos teoremas e demonstrações mais importantes vão ser sobre operações e objetos mais complicados —
- produto interno (→ norma, comprimento, ângulo...),
- conjuntos (retas, segmentos...)

Defs:

$\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$ "produto interno"

$\|\vec v\| = \sqrt{\vec v\cdot\vec v}$ "norma"

Exemplo:

$\|\overrightarrow{(3,4)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(3,4)}\cdot\overrightarrow{(3,4)}}$
$= \sqrt{3\cdot 3 + 4\cdot 4}$
$= \sqrt{25}$
$= 5.$

Conjuntos ($\times 3$)

Vamos ter três notações diferentes pra construir conjuntos formalmente...

Já vimos esta.

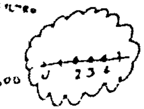
$\{\underbrace{(x,0)}_{\text{expr}} \mid \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{gerador}}\}$ (x: var, $\mathbb{R}$: conj)

E esta aqui, no ensino médio:

$\{\underbrace{(x,y)\in\mathbb{R}^2}_{\text{gerador}} \mid \underbrace{y=x+1}_{\text{filtro}}\}$ (x, y: vars; $\mathbb{R}^2$: conj)

E esta.

$\{\underbrace{2}_{\text{expr}}, \underbrace{3}_{\text{expr}}, \underbrace{4}_{\text{expr}}\}$



Exercícios:

Calcule e represente graficamente:

(a) $\{(x,1) \mid x\in\{2,3,4\}\}$
(b) $\{(x,1) \mid x\in\{2,2.5,3,3.5,4\}\}$
(c) $\{(t,t+1) \mid t\in\{2,3,4\}\}$
(d) $\{(t,t^2) \mid t\in\{-2,-1,0,1,2\}\}$
(e) $\{(x,1) \mid x\in[2,4]\}$
(f) $\{(-2,0)+t\overrightarrow{(1,1)} \mid t\in\{1,2,3\}\}$

Dica: em dúvida faça uma tabela...

t	$t\overrightarrow{(1,1)}$	$(-2,0)+t\overrightarrow{(1,1)}$
1	$\overrightarrow{(1,1)}$	$(-1,1)$
2	$\overrightarrow{(2,2)}$	$(0,2)$
3	$\overrightarrow{(3,3)}$	$(1,3)$

Igualdade

$(2,3)\neq 4$ porque "(2,3)" e "4" são objetos de tipos diferentes.

$(2,3)\neq(2,4)$ porque as segundas coordenadas são diferentes.

$\{2,3\}\neq\{2,4\}$ porque $\{2,3\}$ tem um elemento que não pertence a $\{2,4\}$.

Dois conjuntos, A e B, são iguais quando têm os mesmos elementos... ou, equivalentemente, quando $(\forall a\in A.\ a\in B)\wedge(\forall b\in B.\ b\in A)$.

Def (com cara de MD): Se A e B são conjuntos
$A=B \leftrightarrow ((\forall a\in A.\ a\in B)\wedge(\forall b\in B.\ b\in A))$.

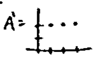
Por enquanto nossos conjuntos são simples e têm representações gráficas precisas.

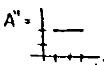
P. ex.:

$(1,1)\in$ 

é verdade.

Exemplo:

Sejam $A'=$ 

$A''=$ 

Então $(1.5,2)\notin A'$,
$(1.5,2)\in A''$,
$A'\neq A''$.

Exercício:

(9) Sejam
$B'=\{(0,1)+t\overrightarrow{(2,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
$B''=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=1\}$,
$C'=\{(t+1,t+2) \mid t\in\mathbb{R}\}$.
Quais destes conjuntos são iguais? Quais são diferentes?

Avisos:
- Temos que marcar a P1! Tragam uma lista de datas boas (a partir de 18/out).
- Se alguém estiver interessado em ajudar num projeto que envolve HTML, Javascript, YouTube, manifestações, OAB, etc, fale comigo!

9/out/2013 A

Nas últimas aulas vimos:

- Demonstrações "algébricas" (por séries de igualdades),
- Algumas propriedades de operações com pontos e vetores (que demonstrávamos "algebricamente"),
- Retas definidas por gerador e filtro e retas definidas por gerador e expressão.

Sejam:

$B(t) = (-2,0) + t\overrightarrow{(2,1)}$,

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + \frac{x}{2}\}$,

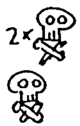
$r' = \{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Repare que $B(t)$ é uma trajetória... (!)

t	$B(t)$
0	
1	
2	
3	

O que a gente vai fazer hoje e na próxima aula

- Um monte de demonstrações (algébricas, que o leitor de ressaca entenda) de propriedades do produto interno
- $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$?
- $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$?
- Todo ponto de r pertence a r' 2×
- Todo ponto de r' pertence a r.
- $r = r'$



Proposição:

(*) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$.

Isto é um modo abreviado de dizer: para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo vetor $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^2$ vale

$$\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|.$$

Tabela:

k	$\vec{v}$	$\|k\vec{v}\|$	$k\|\vec{v}\|$
1	$\overrightarrow{(2,3)}$		
2	$\overrightarrow{(3,0)}$		
4	$\overrightarrow{(0,5)}$		
5	$\overrightarrow{(0,0)}$		
2	$\overrightarrow{(-3,0)}$		
2	$\overrightarrow{(3,4)}$		
-2	$\overrightarrow{(3,4)}$		

Como é que a gente visualiza isto?

Como é que a gente pode ver se a proposição $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$ parece razoável sem fazer contas?

$\boxed{\text{TREINEM!}}$

Toda proposição matemática é ou verdadeira ou falsa — a linguagem na qual proposições são escritas só permite proposições precisas, que vão ser verdadeiras ou falsas.

Muitos exercícios são da forma: "A proposição .... é verdadeira ou falsa? Justifique".

Outro personagem importante: o aluno ideal de GA.

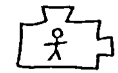
Prop

→ V ou F
→ justificativa.

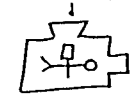
Leitor de ressaca →

→ OK

$\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$



→ Falso
→ Quando $k=-2$, $\vec{v} = \overrightarrow{(3,0)}$ temos $\|k\vec{v}\| = 6$ e $k\|\vec{v}\| = -6$.



→ OK

9/out/2013 | B

Hoje: Vários tipos de demonstrações!

Na aula passada vimos:

- demonstrações "algébricas" (por séries de igualdades)
- Algumas propriedades de operações com vetores (demonstráveis "algebricamente")
- Conjuntos definidos por gerador e filtro e conjuntos definidos por filtro e expressão

Sejam:

$B(t) = (-2,0) + t\overrightarrow{(2,1)}$

$r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 1 + \frac{x}{2}\}$

$r' = \{B(t) \mid t\in\mathbb{R}\}$

A função

$$B: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto B(t) = (-2,0)+t\overrightarrow{(2,1)}$$

define uma trajetória (MRU!)

Proposições

① $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$

② $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$

③ Todo ponto de r pertence a r' × 2

④ Todo ponto de r' pertence a r

⑤ $r = r'$

Uma afirmação do tipo ① é uma abreviação pra algo maior:

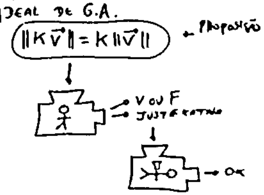
$$\forall k\in\mathbb{R}.\ \forall \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^2.\ \|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$$

Exercício:

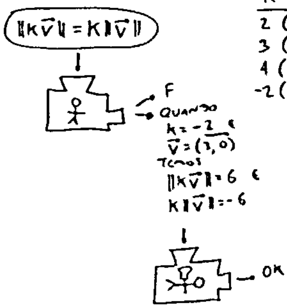
Complete:

k	$\vec{v}$	$\|k\vec{v}\|$	$k\|\vec{v}\|$
1	$\overrightarrow{(2,3)}$		
2	$\overrightarrow{(3,0)}$		
3	$\overrightarrow{(0,4)}$		
4	$\overrightarrow{(0,-5)}$		
6	$\overrightarrow{(0,0)}$		
-6	$\overrightarrow{(0,0)}$		
0	$\overrightarrow{(3,4)}$		
2	$\overrightarrow{(3,4)}$		
-2	$\overrightarrow{(3,4)}$		

- Como visualizar isto?
- Mais um personagem importante: o aluno ideal de G.A.



Obs: A linguagem matemática faz com que toda proposição seja verdadeira ou falsa!



Como visualizar a proposição $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$?

Exemplos:

k	$\vec{v}$
2	$\overrightarrow{(3,0)}$
3	$\overrightarrow{(0,4)}$
4	$\overrightarrow{(0,-3)}$
-2	$\overrightarrow{(3,0)}$

Exercício: Demonstre que $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$.

(Prop:) ④ Todo ponto de r' pertence a r.

(isto é equivalente a:) Para todo $t\in\mathbb{R}$ temos $B(t)\in r$.

(ou seja): Para todo $t\in\mathbb{R}$ temos $(-2,0)+t\overrightarrow{(2,1)}\in r$

(ou seja): Para todo $t\in\mathbb{R}$ temos $(-2+2t,\, t)\in r$

(ou seja): $\forall t\in\mathbb{R}.\ t = 1 + \frac{-2+2t}{2}$

(Prop): ③ Todo ponto de r pertence a r'.

(ou seja): $\forall x,y\in\mathbb{R}.\ (((x,y)\in r) \to (\exists t\in\mathbb{R}.\ (x,y)=B(t)))$

Como encontrar este t?

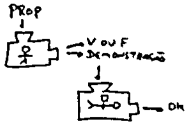
Sugestão: Comece com casos particulares, e quando você estiver entendendo o problema um pouco melhor, aí generalize...

Exercício: Escolha algum $(x,y)\in r$ e tente encontrar o t associado a ele. Tente encontrar uma fórmula para este t (a partir de x e y).

Teste as suas fórmulas!

11/out/2013 | A

Na aula passada vimos que vamos ter que provar muitos teoremas, e que isto



vai ser uma das idéias mais importantes...

E vimos que algumas proposições - como $r \subseteq r'$ e $r' \subseteq r$ vão ter demonstrações não-algébricas (por causa do "existe").

Pra casa:

Baixem a 1ª lista de exercícios do Reginaldo e tentem resolver todos os problemas de V ou F dela.

Produto interno

Def: $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$

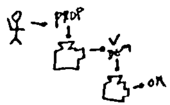
Como visualizar isto? Podemos fazer o seguinte (esta idéia vale pra qualquer operação!):

Seja
$F(c,d) = \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}$

ou seja:
$F(x,y) = \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$

Se conseguirmos visualizar as curvas de nível de F isto nos ajuda a entender o que é o produto interno por $\overrightarrow{(2,1)}$...

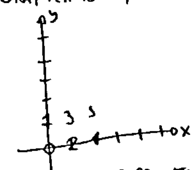
Obs:



Exemplos:

x	y	F(x,y)
0	0	0
1	0	2
2	0	4
0	1	1

Graficamente, $F(x,y)$ é:



Exercício: represente graficamente $F(x,y)$ para muitos valores de x e y; depois tente descobrir quem são

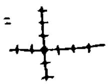
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$

e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 2\}$

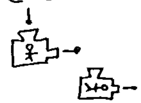
e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 5\}$.

Sejam:

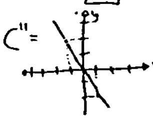
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$

$C' =$  $(= \{(0,0)\})$.

Prop: $C = C'$



Seja: $C'' =$



Prop: $C = C''$

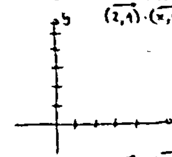
Isto é verdadeiro - demonstração:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)} = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\}$
$= C''$

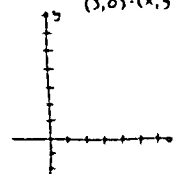
Exercício:

Represente graficamente as curvas de nível de...

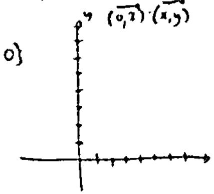
$\overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$



$\overrightarrow{(3,0)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$

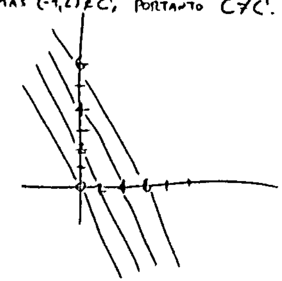


$\overrightarrow{(0,2)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$



Quando $x = -1$ e $y = 2$ temos
$F(x,y) = \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$
$= \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(-1,2)}$
$= -2 + 2$
$= 0$

Portanto $(-1,2) \in C$ mas $(-1,2) \notin C'$, portanto $C \neq C'$.



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 = 4\} = \emptyset$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 = 3\} = \mathbb{R}^2$

$\boxed{11/out/2013}\ \boxed{B}$

Nós vimos na aula passada que vamos precisar fazer demonstrações de vários tipos - algébricas, por contra-exemplo, e coisas mais complicadas nos casos com "existe"...

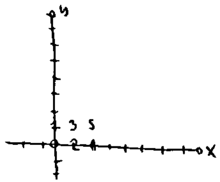
Pra casa: baixem a 1ª lista do Reginaldo (link na página do curso) e tentem fazer os exercícios de V/F/Justifique.

Muitos dos exercícios vão envolver produto interno. Hoje nós vamos ver como visualizar o que o produto interno calcula - e alguns dos métodos vão ser gerais e vão servir pra visualizar e entender qualquer função desconhecida.

Seja

$F(x,y) = \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$.

Podemos começar a entender o comportamento de $F(x,y)$ representando muitos valores de $F(x,y)$ num diagrama:



x	y	F(x,y)
0	0	0
1	0	2
2	0	4
0	1	1
1	1	3
2	1	5

Exercícios:

③ Represente graficamente as curvas de nível de $F(x,y) = \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$

② Represente graficamente os conjuntos

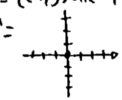
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)} = 0\}$,

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)} = 2\}$,

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)} = 5\}$

① Sejam:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$,

$C' =$  $\left(C' = \{(0,0)\}\right)$

V, F, justifique:

(F) $C = C'$

Quando $x = -1$ e $y = 2$

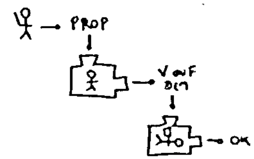
temos $F(x,y) = \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(-1,2)} = 0$,

portanto $(-1,2) \in C$

e $(-1,2) \notin C'$,

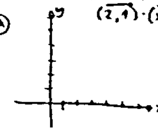
portanto $C \neq C'$.

Diagrama:

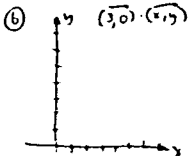


④ Represente graficamente as curvas de nível de:

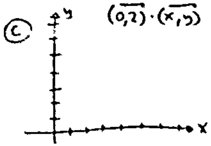
ⓐ $\overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$



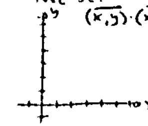
ⓑ $\overrightarrow{(3,0)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$

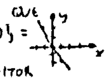


ⓒ $\overrightarrow{(0,2)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$



⑤ Represente graficamente as curvas de nível de: $\overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}$



Como demonstrar que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\} =$  de um modo que o leitor da ressaca entenda??

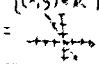
Um modo:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)} = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\}$

$=$ 

Pra casa:

Alguns exercícios da lista do Reginaldo envolvem esta operação...

Def.

$$Pr_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}.$$

Tente entender como é que $Pr_{\overrightarrow{(2,1)}} \overrightarrow{(x,y)}$ se comporta - repare que

$$Pr_{\overrightarrow{(2,1)}} \overrightarrow{(x,y)} = \frac{\overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(x,y)}}{\overrightarrow{(2,1)} \cdot \overrightarrow{(2,1)}} \overrightarrow{(2,1)} = \frac{1}{5}\left((2,1) \cdot \overrightarrow{(x,y)}\right)\overrightarrow{(2,1)}$$

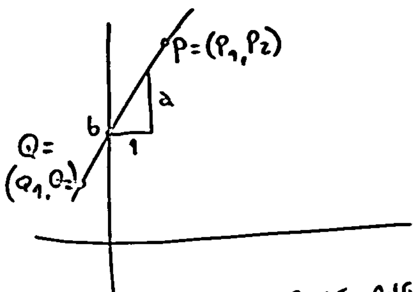
16/out/2013 A

MUITOS DOS TEOREMAS QUE VAMOS PRECISAR ENTENDER TÊM ISTO AQUI:

"SEJA r UMA RETA QUALQUER."

ISTO É DIFÍCIL DE FORMALIZAR ALGEBRICAMENTE!

CONSIDERE ESTE DESENHO:



(UMA RETA COM COEF. ANG. a, COEF. LIN. b, E QUE PASSA PELOS PONTOS P E Q).

a, b, P_1, P_2, Q_1, Q_2 ⇦ 6 NÚMEROS REAIS.

SEJAM:

$S_{cdef} = \{(c,d)+t\overrightarrow{(e,f)} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$r_{ab} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$

EXERCÍCIOS:

(1) REPRESENTE GRAFICAMENTE:

(a) S_{0023}

(b) S_{2123}

(c) S_{2120}

(d) S_{2103}

(e) r_{13}

(f) $r_{1\,-3}$

(g) $r_{-2\,2}$

OBS: COM UM POUCO DE PRÁTICA JÁ DÁ PRA FAZER CADA UM DESTES EM MENOS DE 10 SEGUNDOS! DESCUBRAM COMO!

DICAS:

r_{13}: 1 → COEF. ANG. – INCLINAÇÃO; 3 → COEF. LIN. – INTERSEÇÃO COM EIXO y

$S_{\underbrace{21}_{\text{PONTO INICIAL}}\underbrace{23}_{\text{VETOR GERADOR}}}$.

(2) CONVERTA AS RETAS DO ITEM ANTERIOR DA FORMA r_{ab} PARA A FORMA S_{cdef} E VICE-VERSA.

(3) ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA O CASO S_{cdef}. QUEM SÃO a E b?

Q	S	
16	18	
23	25	⇦ S.A.
30	1	
6	8	⇦ ?

P1: 6/NOV.

OBS: NA AULA QUE VEM VOCÊS VÃO SE PREPARAR PRA TENTAR FAZER DUAS LISTAS DE EXERCÍCIOS DURANTE A SEMANA ACADÊMICA: OS EXERCÍCIOS DE V/F/JUSTIFIQUE DA 1ª LISTA DO REGINALDO E ESTA LISTA AQUI:

http://angg.twu.net/GA/quadro/2013-02-15_lista_alto_contraste.jpg

16/out/2013 B

Vários dos teoremas que vamos ver têm algo tipo isto (!):

"Seja r uma reta qualquer"

Como formalizar algebricamente "uma reta qualquer"?

Defs (temporárias):

$r_{ab} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$

$S_{cdef} = \{(c,d) + t\overrightarrow{(e,f)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

Exercício:

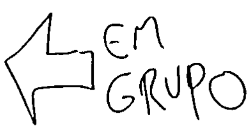
1. Represente graficamente:
   a) S_{0023}
   b) S_{2123}
   c) S_{2120}
   d) S_{2103}
   e) r_{13}
   f) r_{1-3}
   g) r_{-12}

Obs: com um pouco de prática dá pra fazer cada um destes em 10 segundos ou menos...

Dicas:

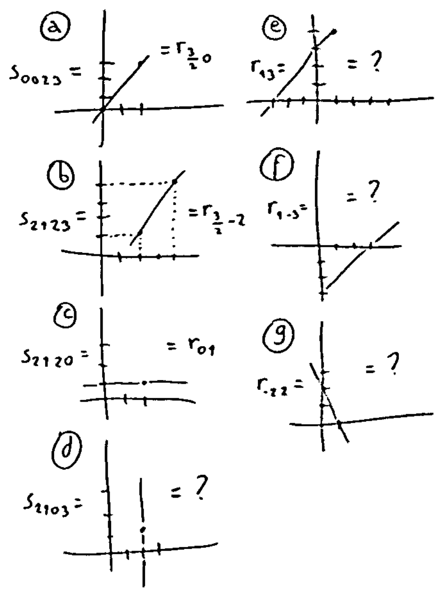
r_{13} — 1: coef. ang. (inclinação); 3: coef. lin. (interseção com eixo y)

S_{2123} — 21: ponto inicial; 23: vetor gerador

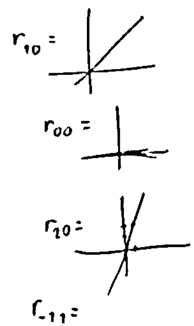


2. Converta as retas do item anterior da forma S_{cdef} para a forma r_{ab} e vice-versa.

3. Encontre uma fórmula geral para converter de S_{cdef} em r_{ab}. Quem são a e b?



Dica: Lembrem de trabalhar sempre com afirmações (mesmo que algumas sejam proposições que você vai testar!)



P1: 8/nov

Semana que vem: semana acadêmica.

Aula que vem: preparação pra vocês fazerem durante a semana acadêmica os problemas de V/F/Justifique da lista 1 do Reginaldo e esta lista aqui: http://angg.twu.net/GA/quadro/2013-02-13_lista-alto_contraste.jpg

18/out/2013 A

PROBLEMA:
ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA A INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS, r E s.

COMO FORMALIZAR ISTO?

UM MODO:

SEJAM $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$

E $r' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a'x+b'\}$.

ENTÃO $r \cap r' = \{(c,d)\}$,

ONDE

$c = \ldots$

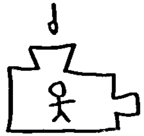
E $d = \ldots$

COMO ENCONTRAR O QUE PÔR NOS "..."s?

COMO TESTAR A SUAS FÓRMULAS?

COMO DEMONSTRAR QUE ELAS VALEM SEMPRE?

PROBLEMA



FORMALIZAÇÃO
FÓRMULA
PRA RESPOSTA
CASO PARTICULAR
TESTE
(...)

EXEMPLO:

QUANDO $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0x+1\}$

E $r' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -1x+3\}$

TEMOS $r \cap r' = \{(2,1)\}$;

OU SEJA, NESTE CASO TEMOS

a	b	a'	b'	c	d
0	1	-1	3	2	1

SUGESTÃO: COMECEM FAZENDO UMA TABELA COM COLUNAS a, b, a', b', c, d, E PONHAM NELA MUITOS CASOS PARTICULARES QUE VOCÊS VÃO USAR PRA TESTAR AS FÓRMULAS DE VOCÊS.

COMO RESOLVER ISTO FORMALMENTE?

COMO $(c,d) \in r$

E $(c,d) \in r'$,

QUANDO $x = c$

E $y = d$

TEMOS

$y = ax+b$

E $y = a'x+b'$,

E PORTANTO

$ax+b = a'x+b'$

$ax - a'x = b'-b$

$(a-a')x = b'-b$

$x = \dfrac{b'-b}{a-a'}$

$y = ax+b$

$= a\dfrac{b'-b}{a-a'} + b$

PORTANTO

$c = \dfrac{b'-b}{a-a'}$,

$d = a\dfrac{b'-b}{a-a'} + b$

OU:
PORTANTO
$c = \dfrac{b'-b}{a-a'}$

E COMO

$y = ax+b$

TEMOS

$d = ac+b$

OBS: DÁ PRA ABREVIAR ISTO!
(USANDO C...)

$\boxed{18/\text{out}/2013}$ $\boxed{B}$

SEJAM r E s DUAS RETAS EM $\mathbb{R}^2$.
MOSTRE COMO CALCULAR A INTERSESÃO ENTRE r E s.

⇧

? !!

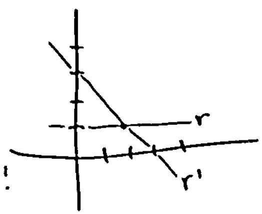
COMO FORMALIZAR ISTO? UMA POSSIBILIDADE:

SEJAM $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$,
$r' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a'x+b'\}$
SE $r \cap r' = \{(c,d)\}$
ENTÃO $c = \ldots$
E $d = \ldots$

⇦ PROPOSIÇÃO

DICA: COMECE COM UMA TABELA DE CASOS PARTICULARES QUE VOCÊ VAI USAR PRA TESTAR A SUA FÓRMULA GERAL.

a	b	a'	b'	c	d	
0	1	-1	3	2	1	OK
0	2	-1	2	0	2	OK
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	3	2	0	OK
1	1	-1	1	0	1	OK
0	1	-4	2	-1	1	NÃO!



PROBLEMA (INFORMAL)

↓

→ FORMALIZAÇÃO
FÓRMULA
PROPOSIÇÃO
CASOS PARTICULARES
TESTES
DEMONSTRAÇÃO

↓

→ OK

EXEMPLO:

SEJAM
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 6x+7\}$,
$r' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 8x+9\}$.
SE $r \cap r' = \{(c,d)\}$
ENTÃO QUANDO $x = c$
E $y = d$
TEMOS $(x,y) = (c,d) \in r$
E PORTANTO
$y = 6x+7$
OU SEJA
$d = 6c+7$
...
E
$d = 8c+9$

ENTÃO:
$6c+7 = 8c+9$
$6c - 8c = 9-7$
$(6-8)c = 9-7$
$c = \frac{9-7}{6-8}$
E $d = 6c+7$
$= 6\,\frac{9-7}{6-8} + 7$.

$d = ac+b$
$d = a'c+b'$
$\frac{d-b}{a} = \frac{d-b'}{a'}$
$a'(d-b) = a(d-b')$
$a'd - a'b = ad - ab'$
$(a'-a)d = a'b + ab'$
$d = \frac{a'b - ab'}{a'-a}$

CASO GERAL:

SEJAM
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$,
$r' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a'x+b'\}$.
SE $r \cap r' = \{(c,d)\}$
ENTÃO QUANDO $x = c$
E $y = d$
TEMOS $y = ax+b$
OU SEJA $d = ac+b$
E $y = a'x+b'$
OU SEJA $d = a'c+b'$
ENTÃO: $ac+b = a'c+b'$
$ac - a'c = b'-b$
$(a-a')c = b'-b$
$c = \frac{b'-b}{a-a'}$
$d = ac+b = a\frac{b'-b}{a-a'} + b = \frac{a(b'-b)+b(a-a')}{a-a'}$

30/out/2013 A

A gente aprendeu estas operações ("novas"):

$\|\vec{v}\|$

$\vec{v}\cdot\vec{u}$

E na lista do Reginaldo vocês viram mais uma:

$Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

A gente tem várias ferramentas pra entender esta operação ("Pr"). Vamos revê-las.

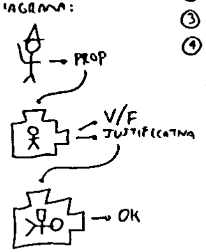
Lembre que podemos fixar um $\vec{u}$ — por exemplo $\vec{u}=\overrightarrow{(2,1)}$ — e aí tentar representar graficamente a operação $\vec{v}\mapsto Pr_{\vec{u}}\vec{v}$.

Isto é um pouquinho mais complicado do que coisas como $(x,y)\mapsto\overrightarrow{(2,1)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$ ou $(x,y)\mapsto\|(x,y)\|^2$.

Mas dá pra fazer (pensem como! :))

Que propriedades a operação $Pr_{\vec{u}}\vec{v}$ tem?

Lembra deste diagrama:



Alguns modos de provar certas proposições que são considerados "óbvios". Vamos ver quais eles são!

Lembrem que vimos algumas propriedades do produto interno.

Prop:

① $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

② $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

③ $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

④ $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Aqui tem um truque: a gente escreve essas propriedades com uma "ordem", da mesma forma que a gente faz com definições — se a gente pegar expressões complicadas e "expandir as definições" e "expandir" os $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$, $(k\vec{u})\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

A gente sempre vai chegar a algo que está "totalmente expandido", e onde não há mais o que fazer...

Exercício: (V/F/justifique):

( ) $Pr_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w}=Pr_{\vec{u}}\vec{w}+Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

( ) $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w})=Pr_{\vec{u}}\vec{v}+Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{v}=k\,Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{v})=k\,Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

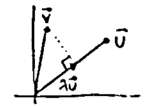
CASA!

(Dica: alguns são V, outros são F...)

Atendimento: Hoje, 18:00-20:00, no LLaRC

Como entender o "Pr"?

Considere este desenho:



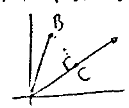
$\vec{u}\neq\vec{0}$...

Traçamos a reta $r=\{O+t\vec{u}\mid t\in\mathbb{R}\}$.

Desenhamos o $\vec{v}$ apoiado na origem — ou seja, ele vai de O para $O+\vec{v}$.

Seja $B=O+\vec{v}$.

Seja C o ponto de r mais próximo de B.



Então $O\hat{C}B$ é um ângulo reto, e (proposição!) $\overrightarrow{OC}=Pr_{\vec{u}}\vec{v}$.

Essa propriedade

(I) nos dá o significado geométrico da projeção,

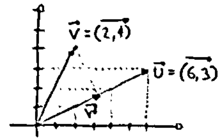
(II) é difícil de formalizar,

(III) é difícil de provar.

Lembrem que temos métodos olhométricos! Truque: "≈".

"aproximadamente".

Exemplo:



$\vec{w}=Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

$\vec{w}\approx\overrightarrow{(3.5,\ 1.7)}$

importante!

Exercício: Tentem descobrir quais das proposições sobre o "Pr" à esquerda são falsas.

Como:

① Façam desenhos, que

② vão indicar que algumas das proposições devem ser falsas,

③ façam as contas com $Pr_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$

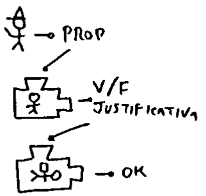
e você vai ter contra-exemplos formais.

$\boxed{30/\text{out}/2013}$ $\boxed{B}$

NÓS JÁ TÍNHAMOS ENTENDIDO AS OPERAÇÕES
$\|\vec{v}\|$
$\vec{v}\cdot\vec{w}$
... MAS AÍ NA LISTA DO REGINALDO APARECEU MAIS UMA:
$$Pr_{\vec{u}}\vec{v} \quad \left(= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\right)$$
COMO ENTENDÊ-LA?
JÁ TEMOS ALGUMAS FERRAMENTAS PRA ISTO - VAMOS REVÊ-LAS.

SABEMOS REPRESENTAR GRAFICAMENTE OPERAÇÕES COMO
$$(x,y) \mapsto Pr_{\overrightarrow{(2,1)}}\overrightarrow{(x,y)}$$
E
$$\overrightarrow{(x,y)} \mapsto Pr_{\overrightarrow{(x,y)}}\overrightarrow{(3,4)}$$
(NA VERDADE TÍNHAMOS VISTO COMO REPRESENTAR FUNÇÕES DE $\mathbb{R}^2$ EM $\mathbb{R}$, COMO
$$(x,y) \mapsto \overrightarrow{(2,1)}\cdot\overrightarrow{(x,y)}$$
E $(x,y) \mapsto \|\overrightarrow{(x,y)}\|^2$;
PENSE EM CASA COMO REPRESENTAR AS NOVAS - VOCÊ VAI PRECISAR DE UM POUCO DE CRIATIVIDADE)

... E NÓS VIMOS VÁRIAS PROPRIEDADES DA NORMA E DO PRODUTO INTERNO.
LEMBRE DESTE DIAGRAMA:



AS "PROPRIEDADES" COMEÇAM COMO "PROPOSIÇÕES" - E SABEMOS VER QUAIS PROPOSIÇÕES SÃO VERDADEIRAS OU FALSAS.

TEMOS ALGUNS TRUQUES PADRÃO QUE FAZEM COM QUE CERTAS PROPOSIÇÕES SEJAM "ÓBVIAS" - VERIFICÁ-LAS E PROVÁ-LAS ALGEBRICAMENTE É ALGO ROTINEIRO.

SABEMOS REESCREVER PROPOSIÇÕES COM
$\vec{u} = \overrightarrow{(u_1,u_2)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(v_1,v_2)}$, ETC,
SABEMOS EXPANDIR DEFINIÇÕES, P.EX.,
$$\underbrace{Pr_{\vec{u}}\vec{v}}_{\text{ISTO}} \;\; \text{VIRA} \;\; \underbrace{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}}_{\text{ISTO}}$$
$(\Longrightarrow)$

E ALGUMAS "PROPRIEDADES" TAMBÉM SÃO ESCRITAS DE UMA FORMA QUE SUGERE UMA ORDEM:
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$(\Longrightarrow)$

SE FAZEMOS TODAS AS "EXPANSÕES" SUGERIDAS POR ESTAS PROPRIEDADES CHEGA UM MOMENTO EM QUE CHEGAMOS A UMA "FORMA TOTALMENTE EXPANDIDA"...

PODEMOS TENTAR FAZER ALGO PARECIDO PRO "PR"!

EXERCÍCIO (V/F/JUSTIFIQUE):

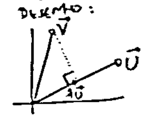
( ) $Pr_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w} = Pr_{\vec{u}}\vec{w} + Pr_{\vec{v}}\vec{w}$

( ) $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = Pr_{\vec{u}}\vec{v} + Pr_{\vec{u}}\vec{w}$

( ) $Pr_{(k\vec{u})}\vec{v} = k\,Pr_{\vec{u}}\vec{v}$

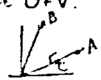
( ) $Pr_{\vec{u}}(k\vec{v}) = k\,Pr_{\vec{u}}\vec{v}$.

UM TRUQUE PRA GENTE ENTENDER $Pr_{\vec{u}}\vec{v}$ É ESTE DESENHO:



COMEÇAMOS COM $\vec{u}$ E $\vec{v}$, $\vec{u}\neq\vec{0}$.
TRAÇAMOS $r = \{O+t\vec{u} \mid t\in\mathbb{R}\}$.
ENTÃO $O+\lambda\vec{u}$ É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE $O+\vec{v}$.

RECORDANDO:

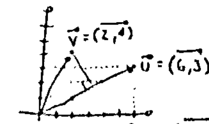


REPARE QUE:
① ISTO É DIFÍCIL DE FORMALIZAR, E
② ISTO VAI SER BEM DIFÍCIL DE PROVAR.

NESTE CASO,
$$\lambda\vec{u} = Pr_{\vec{u}}\vec{v}$$
$$\overrightarrow{OC} = Pr_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB}$$

MÉTODOS OLHOMÉTRICOS PARA CALCULAR PROJEÇÕES
(TRUQUE: "$\approx$")
"APROXIMADAMENTE".

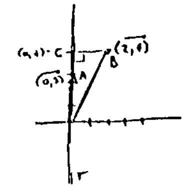
EXEMPLO:



$$Pr_{\overrightarrow{(6,3)}}\overrightarrow{(2,4)} \approx \overrightarrow{(3.3,1.8)}$$

EXERCÍCIO: DESCUBRA, PELO OLHÔMETRO, QUAIS DAS QUATRO PROPOSIÇÕES À ESQUERDA DEVEM SER FALSAS, E AÍ OBTENHA CONTRA-EXEMPLOS (NUMÉRICOS).

DICA:
$$Pr_{\overrightarrow{(0,3)}}\overrightarrow{(2,4)} = ?$$

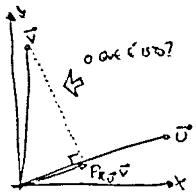


$\boxed{\text{ATENDIMENTO: HOJE E AMANHÃ 18:30-20:00 NO LLARC}}$

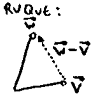
1º/NOV/2013 A

HOJE: ÚLTIMOS DETALHES ANTES DA P1!
- $\vec{v}-\vec{w}$
- $\vec{v}\perp\vec{w}$
- RETAS ORTOGONAIS
- DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA
- PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE B
- DISTÂNCIA ENTRE CONJUNTOS
- INTERSEÇÃO DE RETAS

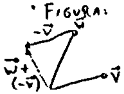
LEMBREM QUE GRAFICAMENTE $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ É ISTO:



TRUQUE:



PORQUE? DOIS MODOS DE LEMBRAR:
- $\vec{v}+(\vec{w}-\vec{v})=\vec{w}$
- FIGURA:



ORTOGONALIDADE

AINDA NÃO VIMOS ÂNGULOS - ALGUMAS PESSOAS SABEM QUE
$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta$,
MAS SÓ VAMOS VER ISTO "DIREITO" DEPOIS.
MAS VAMOS PRECISAR DE UM MODO ALGÉBRICO DE VER QUANDO $\vec{v}$ E $\vec{w}$ SÃO ORTOGONAIS (OU SEJA, $\theta=90°$):

$\boxed{\text{DEF: } \vec{v}\perp\vec{w} \ \underline{\text{SE E SÓ SE}}\ \vec{v}\cdot\vec{w}=0}$

REPARE QUE PODERÍAMOS TER ESCRITO:

$\boxed{\text{DEF: } (\vec{v}\perp\vec{w}) = (\vec{v}\cdot\vec{w}=0)}$

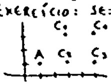
MAS A FORMA COM "SE E SÓ SE" É MAIS COMUM.

EXERCÍCIOS (V OU F):
( ) $\overrightarrow{(1,2)}\perp\overrightarrow{(3,4)}$
( ) $\overrightarrow{(3,4)}\perp\overrightarrow{(4,-3)}$
( ) $\overrightarrow{(3,4)}\perp\overrightarrow{(40,-30)}$
( ) $\overrightarrow{(3,4)}\perp\overrightarrow{(0,0)}$

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E CONJUNTO

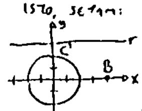
SE $A\in\mathbb{R}^2$ E $C\subseteq\mathbb{R}^2$
ENTÃO
DEF: $d(A,C)=\min\{d(A,P)\mid P\in C\}$

EXERCÍCIO: SEJAM



E $C=\{C_0,C_1,C_2,C_3\}$.
CALCULE $d(A,C)$.

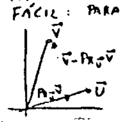
... E AGORA QUE VOCÊ JÁ ENTENDEU ISTO, SEJAM:



CALCULE $d(B,C')$ E $d(B,r)$.

MAIS PROPRIEDADES DA PROJEÇÃO

AS PROPRIEDADES DA PROJEÇÃO QUE VIMOS NA AULA PASSADA - QUE NOS PERMITIAM CALCULAR $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ "NO OLHO" - SÃO DIFÍCEIS DE PROVAR, MAS ESTA AQUI É FÁCIL: PARA $\vec{u},\vec{v}$ EM $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}\neq\vec{0}$,



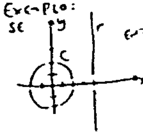
$\boxed{\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}\perp(\vec{v}-\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v})}$ (*)

EXERCÍCIO: PROVE (*)
(É UMA CONTA - DÁ PRA FAZER ELA FICAR PEQUENA SE VOCÊS SE ORGANIZAREM DIREITO. FAÇAM EM GRUPO!)

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

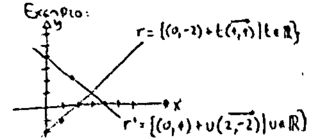
SE $C,C'\subseteq\mathbb{R}^2$
ENTÃO
DEF: $d(C,C')=\min\{d(P,Q)\mid P\in C, Q\in C'\}$.

EXEMPLO: SE



ENTÃO $d(C,r)=2$.

REPARE QUE SE r E r' SE CRUZAM ENTÃO $d(r,r')=0$...
EXEMPLO:



ELAS SE CRUZAM QUANDO $t=3$ E $u=1.5$...

SEJAM $\alpha=\vec{u}\cdot\vec{u}$, $\beta=\frac{1}{\alpha}$, $\gamma=\vec{u}\cdot\vec{v}$.
$\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}\cdot(\vec{v}-\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v})=$
$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\right)=$
$\beta(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}\cdot(\vec{v}-\beta(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u})=$
$(\beta\gamma\vec{u}\cdot\vec{v})-(\beta\gamma\vec{u}\cdot\beta\gamma\vec{u})=$
$(\beta\gamma)(\vec{u}\cdot\vec{v})-(\beta\gamma)(\beta\gamma)(\vec{u}\cdot\vec{u})=$
$(\beta\gamma)\gamma-(\beta\gamma)(\beta\gamma)\alpha=$
$(\beta\gamma)(\gamma-\alpha\beta\gamma)=\ \ldots$
(?)

AVISOS SOBRE A PROVA DE 4ª:

- QUASE TODO MUNDO ACABA FICANDO MAIS QUE 2HS FAZENDO A PROVA - SERIA BOM EU AVISAR OS PROFS DAS AULAS DE DEPOIS QUE VÁRIOS ALUNOS DELES NÃO VÃO APARECER
- TEM INTERVALOS PRA DISCUSSÃO (SEM PODER ESCREVER NEM LER NADA)
- VOCÊS VÃO TER QUE DEMONSTRAR COISAS E ESCREVER AS RESPOSTAS MUITO BEM.

ATENDIMENTO:
HOJE 16:00-18:00
NO CLARC

1º/NOV/2013 B

AVISOS SOBRE A PROVA DA SEMANA QUE VEM:

- 4ª É A PROVA DA TURMA DAS 9:00 ÀS 11:00. QUASE TODO MUNDO VAI QUERER PRORROGAÇÃO DO TEMPO DE PROVA, ENTÃO NA 4ª VOCÊS NÃO VÃO TER AULA — MAS VOCÊS VÃO RECEBER CÓPIAS DAS PROVAS DA OUTRA TURMA, E RECOMENDO MUITO QUE VOCÊS TENTEM FAZÊ-LA PRA TREINAR.
- A PROVA TEM ALGUNS INTERVALOS PRA DISCUSSÃO (SEM ACESSO A NADA PRA LER OU ESCREVER).
- VOCÊS VÃO TER QUE DEMONSTRAR ALGUMAS COISAS, E ESCREVER AS RESPOSTAS DE VOCÊS MUITO BEM.
- TRAGAM COMIDA.
- (?) VOCÊS PODEM TRAZER DE CASA UMA FOLHA MANUSCRITA.

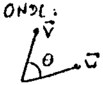
- TEM UM HORÁRIO DE ATENDIMENTO HOJE - 16:00-18:00 NO LLARC

VÁRIAS COISAS QUE FALTARAM

- ALGUMAS PESSOAS JÁ OUVIRAM FALAR QUE

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta$,

ONDE:



ORTOGONALIDADE

DEF: $\vec{v}\perp\vec{w}$ SE E SÓ SE $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

OBS: EM GERAL A GENTE ESCREVE "SE E SÓ SE" AO INVÉS DE:

DEF: $\vec{v}\perp\vec{w} = (\vec{v}\cdot\vec{w}=0)$.

EXERCÍCIOS (V/F):

( ) $\overrightarrow{(1,2)}\perp\overrightarrow{(3,4)}$

( ) $\overrightarrow{(3,4)}\perp\overrightarrow{(-4,3)}$

( ) $\overrightarrow{(3,4)}\perp\overrightarrow{(40,-30)}$

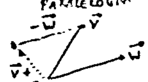
( ) $\overrightarrow{(3,4)}\perp\overrightarrow{(0,0)}$

SUBTRAÇÃO DE VETORES

IDÉIA:

COMO LEMBRAR ISTO?

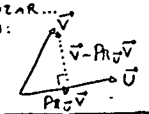
- $\vec{w}+(\vec{v}-\vec{w})=\vec{v}$
- REGRA DO PARALELOGRAMO:



PROJEÇÃO

AS PROPRIEDADES DO "PR" QUE VIMOS NA AULA PASSADA SÃO BOAS PRA "CALCULAR "PR"S GEOMETRICAMENTE", MAS SÃO DIFÍCEIS DE FORMALIZAR...

FIGURA:



TEOREMA:
SE $\vec{u},\vec{v}$ SÃO VETORES EM $\mathbb{R}$ E $\vec{u}\neq\vec{0}$ ENTÃO

$Pr_{\vec{u}}\vec{v}\perp(\vec{v}-Pr_{\vec{u}}\vec{v})$.

EXERCÍCIO:

DEMONSTRE ISTO.

SUGESTÃO:
SEJAM $\alpha=\vec{u}\cdot\vec{u}$,
$\beta=\frac{1}{\alpha}$,
$\gamma=\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$Pr_{\vec{u}}\vec{v}\cdot(\vec{v}-Pr_{\vec{u}}\vec{v}) =$

$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\right)=$

$\frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}-\frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}\right)=$

$\beta\gamma\vec{u}\cdot(\vec{v}-\beta\gamma\vec{u})=$

$(\beta\gamma\vec{u})\cdot\vec{v}-(\beta\gamma\vec{u}\cdot\beta\gamma\vec{u})=$

$(\beta\gamma)(\vec{u}\cdot\vec{v})-(\beta\gamma\beta\gamma)(\vec{u}\cdot\vec{u})=$

$\beta\gamma\gamma - \beta\gamma\cancel{\beta}\gamma\cancel{\alpha} =$

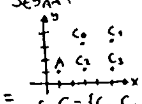
$\beta\gamma\gamma-\beta\gamma\gamma=0$

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E CONJUNTO

SE $A\in\mathbb{R}^2$ E $C\subseteq\mathbb{R}^2$, ENTÃO:

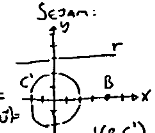
DEF: $d(A,C)=\min\{d(A,P)\mid P\in C\}$.

EXERCÍCIOS:
SEJAM:



E $C=\{C_0,C_1,C_2,C_3\}$.
CALCULE $d(A,C)$.

SEJAM:



CALCULE $d(B,C')$ E $d(B,r)$.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

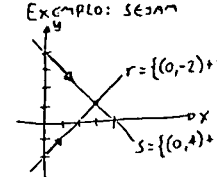
SE $C,C'\subseteq\mathbb{R}^2$ ENTÃO

$d(C,C')=\min\{d(P,P')\mid P\in C, P'\in C'\}$.

EXEMPLO: NA FIGURA ANTERIOR $d(C',r)=1$.

REPARE QUE SE DUAS RETAS r E r' SE CRUZAM TEMOS $d(r,r')=0$!

EXEMPLO: SEJAM



$r=\{(0,-2)+t\overrightarrow{(1,1)}\mid t\in\mathbb{R}\}$

$s=\{(0,4)+u\overrightarrow{(2,-2)}\mid u\in\mathbb{R}\}$

QUANDO $t=3$ E $u=1.5$ TEMOS $(0,-2)+t\overrightarrow{(1,1)}=(0,4)+u\overrightarrow{(2,-2)}$...

PRA CASA: LEMBRE COMO ENCONTRAR ESTE t E ESTE u NO CASO GERAL USANDO MATRIZES...

PRA CASA (PRA QUEM QUISER MAIS EXERCÍCIOS PESADOS PRA SE PREPARAR PRA PROVA):
COMPLEMENTE O EXERCÍCIO 1 DA LISTA MANUSCRITA ACRESCENTANDO AO SEU BANCO DE DADOS DE TEOREMAS E DEMONSTRAÇÕES

(a) A FÓRMULA PRA DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA,

(b) A FÓRMULA PRA DISTÂNCIA ENTRE RETAS PARALELAS.

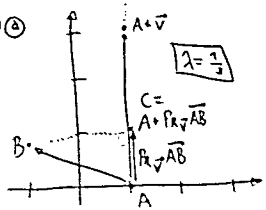
13/NOV/2013 $\boxed{A}$

HOJE: CÁLCULO VETORIAL!

NÃO COPIEM O QUE ESTIVER DO LADO DIREITO DO QUADRO — A GENTE VAI VER A SOLUÇÕES DE VÁRIOS PROBLEMAS DA P1B E VOCÊS VÃO TENTAR RECONSTRUÍ-LAS EM GRUPO.

(1, 3a, 3b)

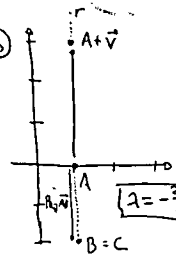
2a



$\boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$

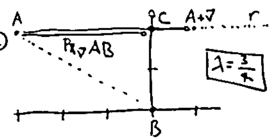
OBS: GRAFICAMENTE É MAIS FÁCIL CALCULAR (GEOMETRICAMENTE) $\lambda_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$, $Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$, C EM OUTRA ORDEM — PRIMEIRO C, DEPOIS $\overrightarrow{AC} = Pr_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$, DEPOIS $\lambda_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$.

2b



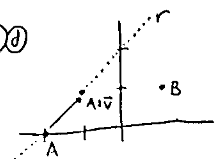
$\boxed{\lambda = -\frac{2}{3}}$

2c

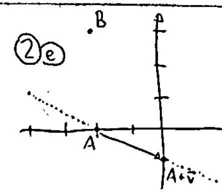


$\boxed{\lambda = \frac{3}{4}}$

2d



2e



① MOSTRE QUE

$Pr_{\vec{v}}\vec{u} \perp Po_{\vec{v}}\vec{u}$.

QUEREMOS VER QUE

$(Pr_{\vec{v}}\vec{u})\cdot(Po_{\vec{v}}\vec{u}) = 0$,

ISTO É, QUE

$\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right) = 0$.

SEJAM: $\alpha = \vec{v}\cdot\vec{v}$,
$\beta = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

$$\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u} - \frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\right)$$
$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\cdot\vec{u}\right) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\right)$$
$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\beta\right) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\alpha\right)$$
$$\shortparallel$$

3a) QUEREMOS VER QUE $\forall t \in \mathbb{R}$

$d(C, C+\vec{w})^2 \leq d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2$.

$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

$d(A,B)^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

$d(C, C+\vec{w})^2 = \|\overrightarrow{C(C+\vec{w})}\|^2$
$= \|\vec{w}\|^2$
$= \vec{w}\cdot\vec{w}$

$d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2 = \|\overrightarrow{(C+t\vec{v})(C+\vec{w})}\|^2$
$= \|\vec{w} - t\vec{v}\|^2$
$= (\vec{w} - t\vec{v})\cdot(\vec{w} - t\vec{v})$
$= \vec{w}\cdot\vec{w} - t\vec{v}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot t\vec{v} + t\vec{v}\cdot t\vec{v}$
$= \vec{w}\cdot\vec{w} + t^2\vec{v}\vec{v}$

Se $C = (10,20)$ e $\vec{w} = (\overrightarrow{3,4})$, QUANTO É $d(C, C+\vec{w})^2$?

$d(C, C+\vec{w})^2 = d((10,20),(13,24))^2$

$3^2 + 4^2$

$\overrightarrow{A(A+\vec{v})} = \vec{v}$

$\overrightarrow{(C+t\vec{v})(C+\vec{w})} = (C+\vec{w}) - (C+t\vec{v})$
$= \vec{w} - t\vec{v}$

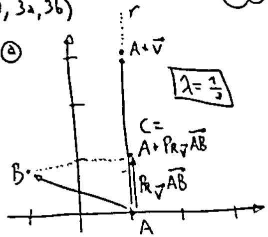
13/NOV/2013 A

HOJE: CÁLCULO VETORIAL!

NÃO COPIEM O QUE ESTIVER DO LADO DIREITO DO QUADRO - A GENTE VAI VER A SOLUÇÕES DE VÁRIOS PROBLEMAS DA P1B E VOCÊS VÃO TENTAR RECONSTRUÍ-LAS EM GRUPO.

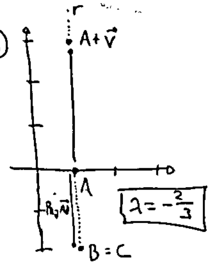
(1, 3a, 3b)

2a

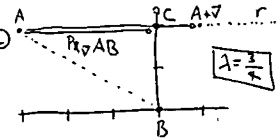


OBS: GRAFICAMENTE É MAIS FÁCIL CALCULAR (GEOMETRICAMENTE) $\lambda_{\vec{v}}\vec{AB}$, $Pr_{\vec{v}}\vec{AB}$, C EM OUTRA ORDEM — PRIMEIRO C, DEPOIS $\vec{AC} = Pr_{\vec{v}}\vec{AB}$, DEPOIS $\lambda_{\vec{v}}\vec{AB}$.

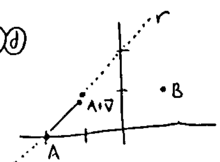
2b



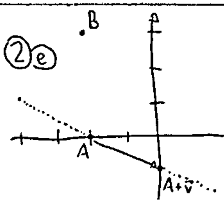
2c



2d



2e



1 MOSTRE QUE

$$Pr_{\vec{v}}\vec{u} \perp Po_{\vec{v}}\vec{u}.$$

QUEREMOS VER QUE

$$(Pr_{\vec{v}}\vec{u})\cdot(Po_{\vec{v}}\vec{u}) = 0,$$

ISTO É, QUE

$$\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right) = 0.$$

SEJAM: $\alpha = \vec{v}\cdot\vec{v}$,
$\beta = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

$$\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\right)$$
$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\cdot\vec{u}\right) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\right)$$
$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\beta\right) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}\alpha\right)$$
$$\shortparallel$$

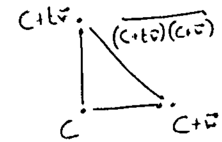
3a QUEREMOS VER QUE $\forall t \in \mathbb{R}$...

$$d(C, C+\vec{w})^2 \leq d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2.$$

3b QUEREMOS VER QUE SE $C = A + Pr_{\vec{v}}\vec{AB}$ ENTÃO $\forall t \in \mathbb{R}$ TEMOS

$$d(C,B)^2 \leq d(A+t\vec{v}, B)^2$$

IDÉIA: SUBSTITUIR
B POR $C+\vec{w}$
$A+t\vec{v}$ POR $C - Pr_{\vec{v}}\vec{AB} + t\vec{v}$
$t\vec{v} - Pr_{\vec{v}}\vec{AB}$ POR $k\vec{v}$



$$d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2 = \|\overline{(C+t\vec{v})(C+\vec{w})}\|^2$$

$$\vec{AB} = B - A$$
$$(C+\vec{w}) - (C+t\vec{v}) = C + \vec{w} - C - t\vec{v}$$

$$(a+b)-(c+d) = a+b-c-d$$

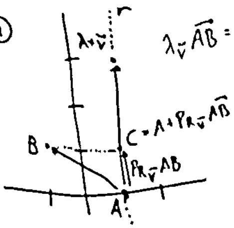
PROP.: SE $A \in \mathbb{R}^2$ E $\vec{v}, \vec{w}$ VETORES EM $\mathbb{R}^2$ ENTÃO $\overline{(A+\vec{v})(A+\vec{w})} = \vec{w} - \vec{v}$.

13/NOV/2013 8

Hoje: discussão sobre a P1 — ou: Cálculo Vetorial

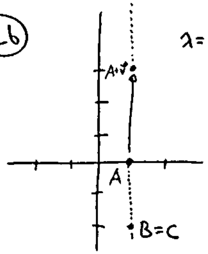
Não copiem nada do que estiver do lado direito do quadro! Os exercícios mais importantes de hoje vão ser de tentar reconstruir, em grupo, as soluções da 3a e da 3b.

(2)(a)



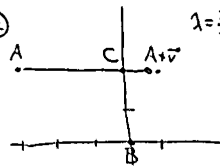
$\lambda_{\vec v}\vec{AB} = \frac{1}{3}$

(2b)



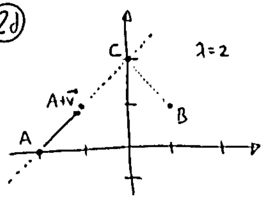
$\lambda = -\frac{2}{3}$

(2c)



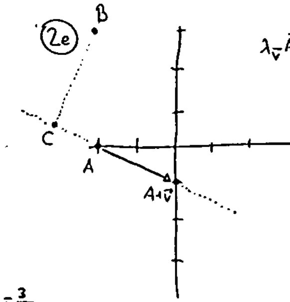
$\lambda = \frac{3}{4}$

(2d)



$\lambda = 2$

(2e)



$\lambda_{\vec v}\vec{AB} = \frac{\vec v\cdot\vec{AB}}{\vec v\cdot\vec v} = \frac{2\cdot0-1\cdot3}{2\cdot2+1\cdot1} = -\frac{3}{5}$

(3a) Queremos ver que se $\vec v \perp \vec u$ então $\forall t \in \mathbb{R}$ temos

$$d(C, C+\vec u)^2 \le d(C+t\vec v, C+\vec u)^2.$$

$$\begin{aligned} d(C, C+\vec u)^2 &= \|\overrightarrow{C(C+\vec u)}\|^2 \\ &= \|(C+\vec u)-C\|^2 \\ &= \|\vec u\|^2 \\ &= \vec u\cdot\vec u \end{aligned}$$

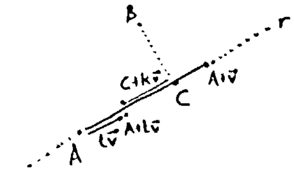
$$\begin{aligned} d(C+t\vec v, C+\vec u)^2 &= \|\overrightarrow{(C+t\vec v)(C+\vec u)}\|^2 \\ &= \|(C+\vec u)-(C+t\vec v)\|^2 \\ &= \|\vec u - t\vec v\|^2 \\ &= (\vec u - t\vec v)\cdot(\vec u - t\vec v) \\ &= \vec u\cdot\vec u + \cancel{\vec u\cdot(-t\vec v)} - \cancel{t\vec v\cdot\vec u} - t\vec v\cdot(-t\vec v) \\ &= \vec u\cdot\vec u + t^2\,\vec v\cdot\vec v \end{aligned}$$

(3b) Queremos ver que se

$C = A + Pr_{\vec v}\vec{AB}$

então

$$d(C,B)^2 \le d(A+t\vec v, B)^2$$

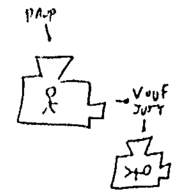


Se $A+t\vec v = C+k\vec v$ tudo fica mais simples...

Que definições/substituições a gente precisa fazer?

(1) Queremos $B = C+\vec u$...
Def: $\vec u =$ ___
Prop: $B = C+\vec u$

(2) Queremos $A+t\vec v = C+k\vec v$
Def. $k =$ ___
Prop. $A+t\vec v = C+k\vec v$



$\boxed{22/\text{NOV}/2013}\ \boxed{A}$

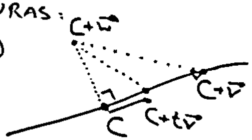
QUESTÃO 3 DA P1
(DA OUTRA TURMA):

(3a) PROVE QUE SE $\vec{v} \perp \vec{w}$
ENTÃO
$\forall t \in \mathbb{R}.\ d(C, C+\vec{w})^2 \leq d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2$

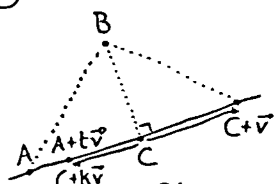
(3b) PROVE QUE SE $C = A + \mathrm{Pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{AB}$
ENTÃO $d(C,B)^2 \leq d(A+t\vec{v}, B)^2$.

FIGURAS:

(3a)



(3b)



COMO VER O 3b COMO UM CASO PARTICULAR DO 3a?

IDÉIA: QUEREMOS $A+t\vec{v} = C+k\vec{v}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \llcorner ?$

QUEM TEM QUE SER k?

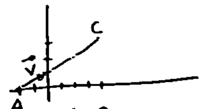
HIPÓTESE: _

CONTAS:

(3a) $d(C, C+\vec{w})^2 = \vec{w}\cdot\vec{w}$
$\leq \vec{w}\cdot\vec{w} + t^2(\vec{v}\cdot\vec{v})$
$= d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2$

DICA: SERÁ QUE ESTE PROBLEMA É PARECIDO COM O QUE TERÍAMOS SE A, t, v, C, k FOSSEM NÚMEROS?
DIGAMOS QUE SABEMOS $A, t, v, C \in \mathbb{R}$.
QUANTO DEVE SER k PARA TERMOS
$A+tv = C+kv$?

SUGESTÃO:
TESTEM A IDÉIA DE VOCÊS COM:



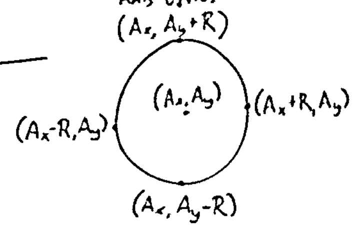
e $t=2$.

CÍRCULOS

TODO CÍRCULO EM $\mathbb{R}^2$ TEM QUATRO PONTOS QUE A GENTE CONSIDERA "ÓBVIOS" ($\Leftarrow$ ESSA TERMINOLOGIA NÃO É PADRÃO!) QUE SÃO O PONTO MAIS ALTO, O MAIS BAIXO, O MAIS À ESQUERDA E O MAIS À DIREITA.

O CÍRCULO DE CENTRO $A=(A_x, A_y)$ E RAIO R $\Leftarrow$ R MAIÚSCULO PRA NÃO CONFUNDIR COM r (RETA)

TEM ESTES PONTOS "MAIS ÓBVIOS":



... E NÓS VAMOS APRENDER A FAZER INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS, CÍRCULOS E CÍRCULOS, E ALGUMAS CONSTRUÇÕES COM RETAS TANGENTES A CÍRCULOS.

VAMOS SEMPRE COMEÇAR COM CASOS EM QUE O CENTRO É A ORIGEM - E PASSAR PROS CASOS MAIS COMPLICADOS DEPOIS.

EXERCÍCIO (CASA):
SEJAM $C_0 = (0,0)$, $R=5$,
E C O CÍRCULO DE CENTRO C_0 E RAIO R.
SEJA $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x+b\}$.
ENCONTRE FÓRMULAS PARA AS INTERSEÇÕES DE r E C.

22/NOV/2013 B

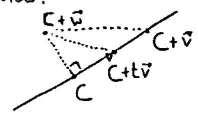
A QUESTÃO 3b DA PROVA ENVOLVIA UMA COISA IMPORTANTE: PRA RESOLVÊ-LA SEM CONTAS ENORMES A GENTE PRECISAVA SABER VER UM CASO COMPLICADO COMO UM CASO PARTICULAR DE ALGO QUE TÍNHAMOS PROVADO NUMA FORMA MAIS SIMPLES...
VAMOS REVER ISTO E COMEÇAR A VER CÍRCULOS E CONSTRUÇÕES.

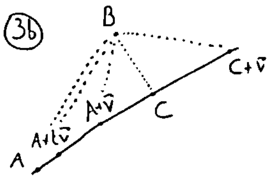
(3a) PROVE QUE SE $\vec{v} \perp \vec{w}$ ENTÃO $\forall t \in \mathbb{R}$
$d(C, C+\vec{w})^2 \leq d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2$.

(3b) PROVE QUE SE $C = A + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{AB}$ ENTÃO $\forall t \in \mathbb{R}$
$d(C, B)^2 \leq d(A+t\vec{v}, B)^2$

COMO "REDUZIR" O 3b AO 3a?
IDÉIA: "SE CONSEGUIRMOS FAZER $A+t\vec{v} = C+k\vec{v}$ SABEMOS RESOLVER O PROBLEMA."
PROP: SE $k = \ldots$ ENTÃO $A+t\vec{v} = C+k\vec{v}$.

FIGURAS:

(3a)


(3b)


CONTAS:

(3a) $d(C, C+\vec{w})^2 = \vec{w}\cdot\vec{w}$
$\leq \vec{w}\cdot\vec{w} + t^2\,\vec{v}\cdot\vec{v}$
$= d(C+t\vec{v}, C+\vec{w})^2$

PROBLEMAS (FAÇAM AGORA, EM GRUPO!)

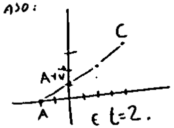
1. ENCONTRE UMA FÓRMULA PRA k QUE FAÇA COM QUE TENHAMOS $A+t\vec{v} = C+k\vec{v}$ (USE OS MÉTODOS QUE VOCÊ QUISER).
2. PROVE QUE ESSA FÓRMULA "FUNCIONA" - isto é, QUE $k = \ldots$ IMPLICA $A+t\vec{v} = C+k\vec{v}$ (ESSA DEMONSTRAÇÃO TEM QUE SER ACEITÁVEL PELO γo.)

DICA:

(a) E SE A, t, v, C, k FOSSEM NÚMEROS E A GENTE SOUBESSE A, t, v, C E QUISESSE DESCOBRIR O k QUE FAÇA $A+tv = C+kv$?

(b) E SE $A=4$, $t=5$, $v=6$, $C=7$?
$4+5\cdot6 = 7+k\cdot6 \Rightarrow k = ?$

(c) TESTE AS SUAS IDÉIAS NESTE CASO:



E $t=2$.

O QUE FALTA PRA PROVAR O 3b?

SEJAM $\vec{w} = \overrightarrow{CB} = B - C$
E $k = t - \lambda_{\vec{v}}\overrightarrow{AB}$
$= t - \dfrac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

ENTÃO
$d(C,B)^2 = d(C, C+\vec{w})^2$
$= \vec{w}\cdot\vec{w}$

$d(A+t\vec{v}, B)^2 = d(C+k\vec{v}, C+\vec{w})^2$
$= (\vec{w}-k\vec{v})\cdot(\vec{w}-k\vec{v})$
$= \vec{w}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot(-k\vec{v}) + (-k\vec{v})\cdot\vec{w} + (-k\vec{v})\cdot(-k\vec{v})$
$= \vec{w}\cdot\vec{w} + k^2\,\vec{v}\cdot\vec{v}$

PORQUÊ? CASA!

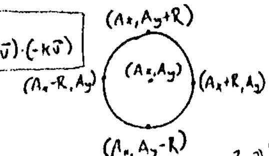
$d(C,B)^2 = d(C, C+\vec{w})^2$
$= \vec{w}\cdot\vec{w}$
$\leq \vec{w}\cdot\vec{w} + k^2\,\vec{v}\cdot\vec{v}$
$= d(C+k\vec{v}, C+\vec{w})^2$
$= d(A+t\vec{v}, B)^2$

CASA. SEJAM $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 5^2\}$ E $r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$. ENCONTRE AS FÓRMULAS PRAS DUAS INTERSEÇÕES DE C E r.

CÍRCULOS

QUALQUER CÍRCULO C EM $\mathbb{R}^2$ TEM QUATRO PONTOS "MAIS ÓBVIOS": O PONTO MAIS ALTO, O MAIS BAIXO, O MAIS À ESQUERDA E O MAIS À DIREITA.

SE C TEM CENTRO $A = (A_x, A_y)$ E RAIO R ESTES PONTOS SÃO:



OBS: $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-A_x)^2+(y-A_y)^2 = R^2\}$

EXEMPLO:
$(A_x-R, A_y) \in C$
$\Leftrightarrow ((A_x-R)-A_x)^2 + (A_y-A_y)^2 = R^2$
$\Leftrightarrow (-R)^2 + 0^2 = R^2$
$\Leftrightarrow R^2 = R^2$

$\boxed{27/\text{nov}/2013}\ \boxed{A}$

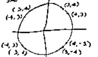
DOIS MODOS DE ENCONTRAR INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS

VAMOS COMEÇAR COM:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 5^2\}$$

E LEMBREM QUE TODO CÍRCULO TEM QUATRO PONTOS "ÓBVIOS".

ALÉM DISSO VAMOS USAR TAMBÉM 8 OUTROS PONTOS, UM POUCO MENOS ÓBVIOS. NO CÍRCULO DE RAIO 5 E CENTRO (0,0), ESTES PONTOS SÃO



A GENTE SABE (PORQUE FICOU DE DEVER DE CASA!) CALCULAR ALGEBRICAMENTE INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS...

Seja $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$

Se $P = (P_1, P_2) \in C$ e $P \in r$

ENTÃO P_1 E P_2 OBEDECEM TANTO $P_1^2 + P_2^2 = 25$ QUANTO $P_2 = aP_1 + b$...

SUBSTITUINDO P_2 POR aP_1+b EM $P_1^2+P_2^2=25$

TEMOS

$$P_1^2 + (aP_1+b)^2 = 25,$$

$$\| $$

$$P_1^2 + (a^2P_1^2 + 2abP_1 + b^2)$$

$$\| $$

$$(a^2+1)P_1^2 + 2abP_1 + b^2$$

$$(a^2+1)P_1^2 + 2abP_1 + (b^2-25) = 0$$

BHASKARA.

AS SOLUÇÕES DE $ax^2+bx+c=0$ SÃO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

AS SOLUÇÕES DE

$$(a^2+1)P_1^2 + 2abP_1 + (b^2-25) = 0$$

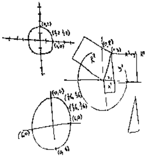
SÃO.

$$P_1 = \frac{-2ab \pm \sqrt{(2ab)^2 - 4(a^2+1)(b^2-25)}}{2(a^2+1)}$$

E DEPOIS QUE TIVERMOS CALCULADO CADA VALOR POSSÍVEL PRA P_1 PODEMOS ENCONTRAR O P_2 CORRESPONDENTE POR

$$P_2 = aP_1 + b$$

EXERCÍCIO: CONHECEMOS 12 PONTOS "ÓBVIOS E MAIS OU MENOS ÓBVIOS" NO CÍRCULO C. USE-OS PRA ESCOLHER DUAS RETAS CUJAS INTERSEÇÕES COM C SEJAM PONTOS COM COORDENADAS INTEIRAS E USE AS FÓRMULAS ACIMA



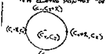
27/nov/2013 | A

DOIS MODOS DE ENCONTRAR INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS

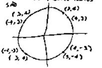
VAMOS COMEÇAR COM.

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=5^2\}$

E LEMBRAR QUE TODO CÍRCULO TEM QUATRO PONTOS "ÓBVIOS":



ALÉM DISSO VAMOS USAR TAMBÉM 8 OUTROS PONTOS, UM POUCO MENOS ÓBVIOS, NO CÍRCULO DE RAIO 5 E CENTRO (0,0). ESTES PONTOS SÃO



A GENTE SABE (PORQUE FICOU DE DEVER DE CASA!!) CALCULAR ALGEBRICAMENTE INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS...

SEJA $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$

SE $P=(P_1,P_2) \in C$

E $P \in r$

ENTÃO P_1 E P_2 OBEDECEM

TANTO $P_1^2+P_2^2=25$

QUANTO $P_2 = aP_1+b$.

SUBSTITUINDO P_2 POR aP_1+b

EM $P_1^2+P_2^2=25$

TEMOS $P_1^2+(aP_1+b)^2=25$,

$$P_1^2+(a^2P_1^2+2abP_1+b^2)$$

$$(a^2+1)P_1^2+2abP_1+b^2$$

$$\Rightarrow (a^2+1)P_1^2+2abP_1+(b^2-25)=0$$

BHASKARA.

AS SOLUÇÕES DE $ax^2+bx+c=0$ SÃO

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

AS SOLUÇÕES DE

$(a^2+1)P_1^2+2abP_1+(b^2-25)=0$

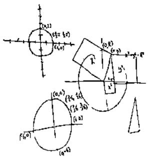
SÃO:

$$P_1=\frac{-2ab \pm \sqrt{(2ab)^2-4(a^2+1)(b^2-25)}}{2(a^2+1)}$$

E DEPOIS QUE TIVERMOS CALCULADO CADA VALOR POSSÍVEL PRA P_1 PODEMOS ENCONTRAR O P_2 CORRESPONDENTE POR

$P_2=aP_1+b$

EXERCÍCIO: CONSIDERE OS 12 PONTOS "ÓBVIOS E MAIS OU MENOS ÓBVIOS" NO CÍRCULO C. USE-OS PRA ESCOLHER DUAS RETAS CUJAS INTERSEÇÕES COM C SEJAM PONTOS COM COORDENADAS INTEIRAS, E USE-AS PRA TESTAR A FÓRMULA ACIMA



P2. 13/P27

BHASKARA:

AS SOLUÇÕES DE

$ax^2+bx+c=0$

SÃO

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

AS SOLUÇÕES DE

$$(a^2+1)P_1^2+2abP_1+(b^2-25)=0$$

SÃO:

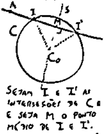
$$P_1=\frac{-2ab\pm\sqrt{(2ab)^2-4(a^2+1)(b^2-25)}}{2(a^2+1)}$$

E DEPOIS QUE TIVERMOS CALCULADO CADA VALOR POSSÍVEL PRA P_1 PODEMOS ENCONTRAR O P_2 CORRESPONDENTE POR:

$$P_2=aP_1+b$$

EXERCÍCIO: CONHECEMOS 12 PONTOS "ÓBVIOS E MAIS OU MENOS ÓBVIOS" NO CÍRCULO C. USE-OS PRA ESCOLHER DUAS RETAS CUJAS INTERSEÇÕES COM C SEJAM PONTOS COM COORDENADAS INTEIRAS, E USE-AS PRA TESTAR A FÓRMULA ACIMA.

EM VÁRIAS SITUAÇÕES ACABA SENDO MELHOR A GENTE ENCONTRAR AS INTERSEÇÕES DE C E r DE OUTRO JEITO...



SEJAM I E I' AS INTERSEÇÕES DE C E r, E SEJA M O PONTO MÉDIO DE I E I'. SEJA s A RETA QUE PASSA POR C_0 E M.

ENTÃO:

(a) $r\perp s$

(b) $d(M,C_0)=d(r,C_0)$

(c) $d(I,M)^2+d(C_0,M)^2=R^2$, $d(I',M)^2+d(C_0,M)^2=R^2$

REPARE QUE PODEMOS USAR ISTO PRA MONTAR UM MÉTODO PRA CALCULAR I E I'...

DIGAMOS QUE O "USUÁRIO" NOS DEU:

- C_0, R
- A, $\vec{v}$

NOTAÇÃO: $\vec{v}^u=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

VAMOS CALCULAR, NESTA ORDEM:

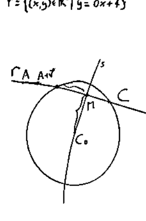
- $\vec{v}^u$
- $\vec{w}^u$ (ORTOGONAL A $\vec{v}$)
- s
- M
- $d(M,C_0)$
- $d(I,M)$
- I, I'

TENTEM COMEÇAR A FAZER ESTAS CONTAS (TERMINEM EM CASA!)

NESTE CASO AQUI:

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=25\}$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0x+4\}$



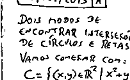
27/NOV/2013 A

DOIS MODOS DE ENCONTRAR INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS

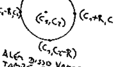
VAMOS COMEÇAR COM:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=5^2\}$

E LEMBREM QUE TODO CÍRCULO TEM QUATRO PONTOS "ÓBVIOS":



ALÉM DISSO VAMOS USAR TAMBÉM 8 OUTROS PONTOS, UM POUCO MENOS ÓBVIOS... NO CÍRCULO DE RAIO 5 E CENTRO (0,0), ESTES PONTOS SÃO:



$y=x+1$
$y=\frac{4}{3}x$

A GENTE SABE (PORQUE FICOU DE DEVER DE CASA!) CALCULAR ALGEBRICAMENTE INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS E RETAS...

SEJA $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$.

SE $P=(P_1,P_2)\in C$ E $P\in r$

ENTÃO P_1 E P_2 OBEDECEM TANTO $P_1^2+P_2^2=25$ QUANTO $P_2=aP_1+b$...

SUBSTITUINDO P_2 POR aP_1+b EM $P_1^2+P_2^2=25$ TEMOS

$$P_1^2+(aP_1+b)^2=25,$$
$$\parallel$$
$$P_1^2+(a^2P_1^2+2abP_1+b^2)$$
$$\parallel$$
$$(a^2+1)P_1^2+2abP_1+b^2$$
$$(a^2+1)P_1^2+2abP_1+(b^2-25)=0$$

BHASKARA:

AS SOLUÇÕES DE $ax^2+bx+c=0$ SÃO

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

AS SOLUÇÕES DE

$$(a^2+1)P_1^2+2abP_1+(b^2-25)=0$$

SÃO:

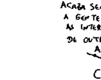
$$P_1=\frac{-2ab\pm\sqrt{(2ab)^2-4(a^2+1)(b^2-25)}}{2(a^2+1)}$$

E DEPOIS QUE TIVERMOS CALCULADO CADA VALOR POSSÍVEL PRA P_1 PODEMOS ENCONTRAR O P_2 CORRESPONDENTE POR:

$P_2=aP_1+b$

EXERCÍCIO: CONHECEMOS 12 PONTOS "ÓBVIOS E MAIS OU MENOS ÓBVIOS" NO CÍRCULO C. USE-OS PRA ESCOLHER DUAS RETAS CUJAS INTERSEÇÕES COM C SEJAM PONTOS COM COORDENADAS INTEIRAS, E USE-AS PRA TESTAR A FÓRMULA ACIMA.

EM VÁRIAS SITUAÇÕES ACABA SENDO MELHOR A GENTE ENCONTRAR AS INTERSEÇÕES DE C E r DE OUTRO JEITO...



SEJAM I E I' AS INTERSEÇÕES DE C E r, E SEJA M O PONTO MÉDIO DE I E I'. SEJA S A RETA QUE PASSA POR C_0 E M.

ENTÃO:

ⓐ $r\perp S$

ⓑ $d(M,C_0)=d(r,C_0)$

ⓒ $d(I,M)^2+d(C_0,M)^2=R^2$, $d(I',M)^2+d(C_0,M)^2=R^2$

REP...
USA...
UM...
C...
D...
"...
• ...
• ...
N...
1...

P2: 13/92?

BHASKARA:

AS SOLUÇÕES DE
$ax^2+bx+c=0$
SÃO
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3). AS SOLUÇÕES DE
$(a^2+1)P_1^2+2abP_1+(b^2-25)=0$
SÃO:
$$P_1=\frac{-2ab\pm\sqrt{(2ab)^2-4(a^2+1)(b^2-25)}}{2(a^2+1)}$$

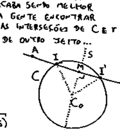
E DEPOIS QUE TIVERMOS CALCULADO CADA VALOR POSSÍVEL PRA P_1 PODEMOS ENCONTRAR O P_2 CORRESPONDENTE POR:

$P_2=aP_1+b$

$=0$

EXERCÍCIO: CONHECEMOS 12 PONTOS "ÓBVIOS E MAIS OU MENOS ÓBVIOS" NO CÍRCULO C. USE-OS PRA ESCOLHER DUAS RETAS CUJAS INTERSEÇÕES COM C SEJAM PONTOS COM COORDENADAS INTEIRAS, E USE-AS PRA TESTAR A FÓRMULA ACIMA.

EM VÁRIAS SITUAÇÕES ACABA SENDO MELHOR A GENTE ENCONTRAR AS INTERSEÇÕES DE C E r DE OUTRO JEITO...



SEJAM I E I' AS INTERSEÇÕES DE C E r, E SEJA M O PONTO MÉDIO DE I E I'. SEJA s A RETA QUE PASSA POR C_0 E M.

ENTÃO:

ⓐ $r \perp s$

ⓑ $d(M,C_0)=d(r,C_0)$

ⓒ $d(I,M)^2+d(C_0,M)^2=R^2$,
$d(I',M)^2+d(C_0,M)^2=R^2$

REPARE QUE PODEMOS USAR ISTO PRA MONTAR UM MÉTODO PRA CALCULAR I E I'...

DIGAMOS QUE O "USUÁRIO" NOS DEU:

- C_0, R
- A, $\vec{v}$

NOTAÇÃO: $\vec{v}^u=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

VAMOS CALCULAR, NESTA ORDEM:

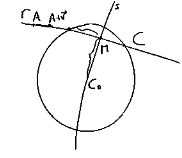
- $\vec{v}^u$
- $\vec{w}^u$ (ORTOGONAL A $\vec{v}$)
- s
- M
- $d(M,C_0)$
- $d(I,M)$
- I, I'

TENTEM COMEÇAR A FAZER ESTAS CONTAS (TERMINEM EM CASA!)

NESTE CASO AQUI:

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=25\}$

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0x+4\}$



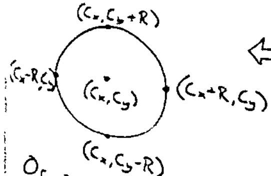
27/Nov/2013 B

Dois modos de calcular interseções de círculos e retas

Vamos começar com este caso:

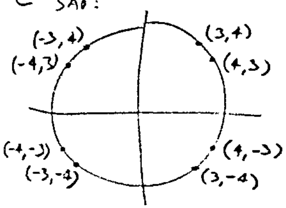
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=5^2\}$

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$



⇦ Os 4 "pontos óbvios" do círculo

Os oito pontos "mais ou menos óbvios" do círculo C são:



Seja $P \in C \cap r$,

$P = (P_1, P_2)$.

Como $P \in C$

então $P_1^2 + P_2^2 = 5^2$;

como $P \in r$

então: $P_2 = aP_1 + b$.

Substituindo P_2 por aP_1+b em

$P_1^2 + P_2^2 = 5^2$,

temos:

$P_1^2 + (aP_1+b)^2 = 25$

$P_1^2 + a^2P_1^2 + 2abP_1 + b^2 = 25$

$(a^2+1)P_1^2 + 2abP_1 + (b^2-25) = 0$

Lembre que as soluções de

$ax^2+bx+c=0$

são

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Então as soluções de

$(a^2+1)P_1^2 + 2abP_1 + (b^2-25) = 0$

são:

$P_1 = \frac{-2ab \pm \sqrt{(2ab)^2 - 4(a^2+1)(b^2-25)}}{2(a^2+1)}$

e o P_2 correspondente a cada P_1 pode ser obtido por:

$P_2 = aP_1 + b$

Vamos chamar estas soluções de:

$P^+ = (P_1^+, P_2^+)$

$P^- = (P_1^-, P_2^-)$

Exercício:

Escolha duas retas tais que as interseções delas com o círculo C sejam pontos "óbvios" ou "mais ou menos óbvios", e use-as pra testar a fórmula acima.

Casos mais simples:

$y = 0x+4$

$y = x+1$

$y = \frac{4}{3}x+0$

Casos mais difíceis:

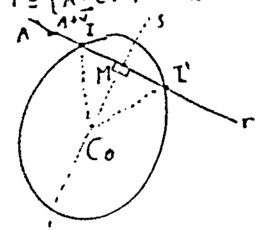
$y = \frac{x}{7} + 4 - \frac{3}{7}$

$= \frac{x}{7} + \frac{25}{7}$

Outro método

Digamos que

$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.



Seja s uma reta ortogonal a r passando por C_0, M a interseção de r e s, $r \cap C = \{I, I'\}$.

Então:

- M é ponto médio de I e I',
- $d(M, C_0) = d(r, C_0)$
- $d(M,I)^2 + d(M,C_0)^2 = d(C_0,I)^2 = R^2$
- $d(M,I')^2 + d(M,C_0)^2 = d(C_0,I')^2 = R^2$

Ordem:

C_0, R, (círculo)

$A, \vec{v}$ (reta)

dados pelo "usuário"

Aí calculamos:

$\vec{u}$ (ortogonal a $\vec{v}$),

s,

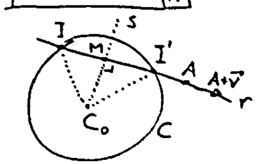
M,

$d(C_0, M)$,

$d(M, I)$,

I, I'. ⇦

29/NOV/2013 A



...ESTAMOS VENDO UM MÉTODO PRA CALCULAR A INTERSEÇÃO DE $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ e $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\}$ (ONDE $C_0=(x_0,y_0)$) NO QUAL CALCULAMOS, NESTA ORDEM,

- $\vec{w}\perp\vec{v}$, (ESCOLHAM UM $\vec{w}$)
- $s=\{C_0+t\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
- $M = r\cap s$
- $d(C_0,M)$ } PODEMOS INVERTER ESTA ORDEM
- $d(M,I)$
- I, I'.

VAMOS COMEÇAR COM ESTES CASOS:

(a) $C_0=(0,0)$, $R=5$, $A=(6,4)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$

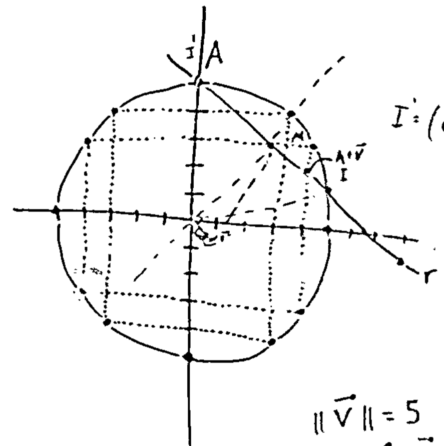
(b) $C_0=(0,0)$, $R=5$, $A=(6,2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$,

(c) $C_0=(0,0)$, $R=5$, $A=(0,5)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(4,-3)}$

(d) $C_0=(0,0)$, $R=5$, $A=(0,2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(4,-3)}$

EM CADA UM DESTES CASOS CALCULE $\vec{w}$, M, $d(C_0,M)$, $d(M,I)$, I, I'. TENTE USAR A ORDEM SUGERIDA SEMPRE QUE AS CONTAS NÃO FOREM ÓBVIAS NO OLHÔMETRO. FAÇAM EM GRUPO.

(c)



$I' : (0,5)$

$\|\vec{V}\| = 5$

$\vec{V}^u = \frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$
$= \frac{1}{5}\overrightarrow{(4,-3)}$
$= (0.8,-0.6)$

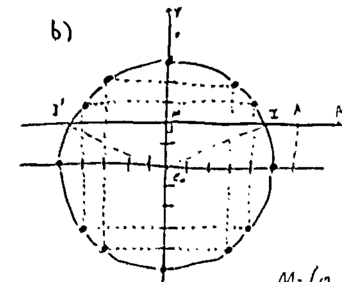
$\|\vec{V}^u\| = 1$

$\|10\,\vec{V}^u\| = 10$

$\|-10\,\vec{V}^u\| = 10$

$\vec{w}=(3,4)$ ou $\vec{w}=(-3,-4)$ } AS DUAS ESCOLHAS MAIS ÓBVIAS

b)



$M=(0,$

$d(C_0,M$

$\overline{MI}$

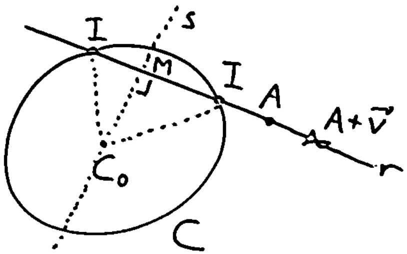
$(x-0)^2+(y-0)^2=25$

$25+y^2=25$

$I(\sqrt{21},2)$

$I'(-\sqrt{21},2)$

29/NOV/2013 B



Vamos ver um método de calcular as interseções de $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$

e $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\}$

(onde $C_0=(x_0,y_0)$)

Calculando, nesta ordem:

- $\vec{w}\perp\vec{v}$ (escolha um $\vec{w}\neq\vec{0}$),
- $s=\{C_0+t\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}$
- $M=r\cap s$,
- $d(C_0,M)$, — esta ordem pode ser invertida
- $d(M,I)$,
- I, I'.

Vamos ver estes 4 casos (exercícios!):

ⓐ $C_0=(0,0)$, $R=5$,
$A=(6,4)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$,

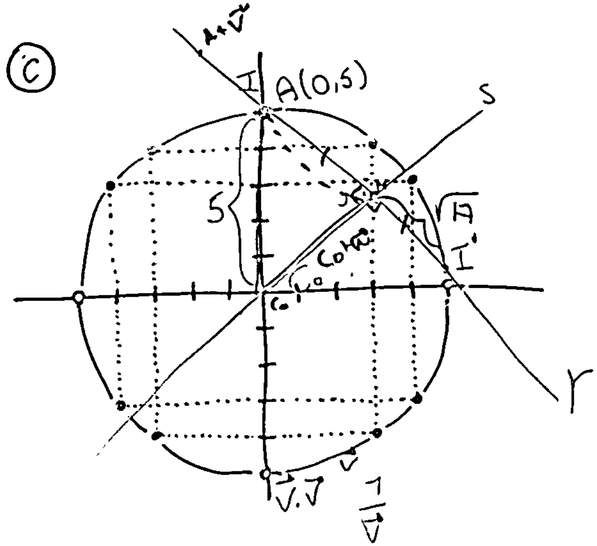
ⓑ $C_0=(0,0)$, $R=5$,
$A=(6,2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$,

ⓒ $C_0=(0,0)$, $R=5$,
$A=(0,5)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(4,-3)}$,

ⓓ $C_0=(0,0)$, $R=5$,
$A=(0,2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(4,-3)}$

Dica: Represente cada caso graficamente; toda vez que o valor de algo que você quer calcular não for óbvio pelo olhômetro tente calculá-lo seguindo a ordem à esquerda. :)

ⓒ

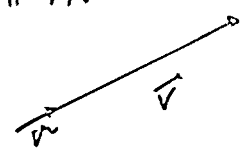


$$\vec{v}^{u}=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

$$\|\vec{v}^{u}\|=1$$

$$\|99\,\vec{v}^{u}\|=99\,\|\vec{v}^{u}\|=99$$

$$\|-99\,\vec{v}^{u}\|=99$$



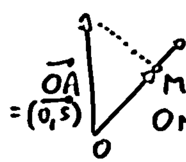
$r = \{(0,5) + t(4,-3) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\vec{w} = \overrightarrow{(3,4)}$

$C_0 = (0,0)$

$S = \{(0,0) + t(3,4) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 5^2\}$



$\vec{v} = \overrightarrow{(4,-3)}$

$\vec{w} = \overrightarrow{(3,4)}$

$$\begin{aligned}
OM &= PR_{\vec{w}}\, \overrightarrow{OA} \\
&= PR_{\overrightarrow{(3,4)}}\, \overrightarrow{(0,5)} \\
&= \frac{\overrightarrow{(3,4)} \cdot \overrightarrow{(0,5)}}{\overrightarrow{(3,4)} \cdot \overrightarrow{(3,4)}}\, \overrightarrow{(3,4)} \\
&= \frac{20}{25} \cdot \overrightarrow{(3,4)} \\
&= \frac{4}{5}\overrightarrow{(3,4)} \\
&= \overrightarrow{(2.4, 3.2)}
\end{aligned}$$

$M = (2.4, 3.2)$

$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MI'}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IM} &= M - I \\
&= (2.4, 3.2) - (0,5) \\
&= \overrightarrow{(2.4, -1.8)}
\end{aligned}$$

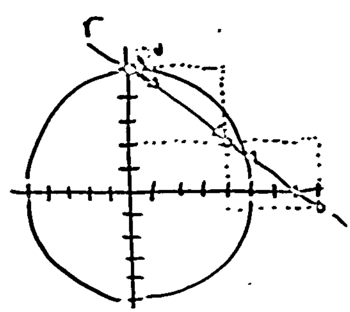
$$\begin{aligned}
I' &= M + \overrightarrow{MI'} \\
&= M + \overrightarrow{IM} \\
&= (2.4, 3.2) + \overrightarrow{(2.4, -1.8)} \\
&= (4.8, 1.4)
\end{aligned}$$

$\vec{v}^{\,u} = \frac{1}{5}\vec{v} = \overrightarrow{(0.8, -0.6)}$

$d(C_0, M)^2 + d(M, I)^2 = 25$

$16 + d(M,I)^2 = 25$

$d(M,I) = 3$



6/DEZ/2013 A

INTERSEÇÃO DE DOIS CÍRCULOS

SEJAM $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-C_x)^2+(y-C_y)^2-R^2}_{E_C(x,y)}=0\}$

E $C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-C'_x)^2+(y-C'_y)^2-R'^2}_{E_{C'}(x,y)}=0\}$

SEJA $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{E_C(x,y)-E_{C'}(x,y)}_{E_r(x,y)}=0\}$.

EXERCÍCIO:

SEJAM $C_0=(0,0)$, $R=5$

$C'_0=(C'_x,0)$, $R'\in\mathbb{R}$

(OU SEJA, $C_x=C_y=C'_y=0$).

ENCONTRE A RETA QUE CONTÉM OS DOIS PONTOS DE $C\cap C'$.

TESTE A SUA FÓRMULA NESTES CASOS:

(a) $C'_0=(4,0)$, $R'=3$,

(b) $C'_0=(6,0)$, $R'=5$,

(c) $C'_0=(8,0)$, $R'=5$.

NO EXERCÍCIO,

$$E_C(x,y)=(x-C_x)^2+(y-C_y)^2-R^2$$
$$=x^2+y^2-25$$
$$E_{C'}(x,y)=(x-C'_x)^2+(y-C'_y)^2-R'^2$$
$$=(x^2-2C'_xx+C'^2_x)+y^2-R'^2$$
$$E_r(x,y)=E_C(x,y)-E_{C'}(x,y)$$
$$=(-25)-(-2C'_xx+C'^2_x-R'^2)$$
$$=(2C'_x)x+(-25-C'^2_x+R'^2)$$

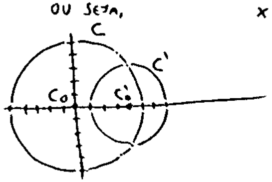
TESTANDO A FÓRMULA NO CASO (a):

$$E_r(x,y)=(2\cdot 4)x+(-25-4^2+3^2)$$
$$=8x+(-25-16+9)$$
$$=8x-32$$

OU SEJA, $E_x(x,y)=8x-32=0$

SE E SÓ SE $x-4=0$

OU SEJA, $x=4$.



O MÉTODO (ALGÉBRICO!) PRA ENCONTRAR $C\cap C'$ É O SEGUINTE: ENCONTRE A RETA

$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid E_r(x,y)=0\}$

E AÍ CALCULAMOS

$C\cap r$

OU

$C'\cap r$.

O QUE DÁ PRA FAZER COM ISTO?

MUITA COISA.
DÁ ATÉ PRA GENTE RESOLVER PROBLEMAS DE TANGÊNCIA — POR EXEMPLO:
SEJAM C CÍRCULO EM $\mathbb{R}^2$,
A PONTO EM $\mathbb{R}^2$.
PROBLEMA:
ENCONTRE AS DUAS RETAS, s E s', QUE PASSAM PELO PONTO A E SÃO TANGENTES AO CÍRCULO C.

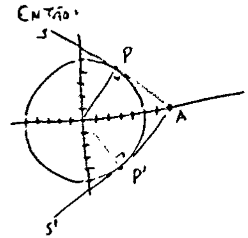
O TRUQUE PRA ISTO É UM TEOREMA QUE VOCÊS VIRAM NA P1:

TEOREMA:
SEJAM $A,B\in\mathbb{R}^2$.
SEJA $C=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid A\hat{P}B=90°\}$.
ENTÃO C É O CÍRCULO QUE TEM O SEGMENTO AB COMO UM DOS SEUS DIÂMETROS.

EXERCÍCIO/EXEMPLO:

SEJAM $C_0=(0,0)$, $R=5$,
$A=(7,0)$.

ENTÃO:



PROBLEMA:
QUAL É O CÍRCULO
$C=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid A\hat{P}B=90°\}$
QUE VAI NOS AJUDAR A RESOLVER O EXERCÍCIO/EXEMPLO?

$$(x^2-2\cdot 6\cdot x+6^2)$$
$$\parallel$$
$$(x-6)^2+(y-7)^2-8^2=0$$
$$C_0=(6,7),\ R=8$$

$$x^2+y^2-7x=0$$
$$\parallel$$
$$(x^2-7x)+y^2$$

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+y^2-R^2 \overset{\text{SABEMOS}}{=}$$
$$\left(x^2-7x+\frac{49}{4}\right)+y^2-R^2 \overset{\text{QUEREMOS}}{=}$$
$$x^2-7x \quad +y^2$$

SE $R=\frac{7}{2}$ TUDO DÁ CERTO.

6/DEZ/2013 $\boxed{A}$

INTERSEÇÃO DE DOIS CÍRCULOS

Sejam $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-C_x)^2+(y-C_y)^2-R^2}_{E_C(x,y)}=0\}$

e $C'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-C'_x)^2+(y-C'_y)^2-R'^2}_{E_{C'}(x,y)}=0\}$

Seja $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{E_C(x,y)-E_{C'}(x,y)}_{E_r(x,y)}=0\}$.

Exercício:
Sejam $C_0=(0,0)$, $R=5$
$C'_0=(C'_x,0)$, $R'\in\mathbb{R}$
(ou seja, $C_x=C_y=C'_y=0$).
Encontre a reta que contém os dois pontos de $C\cap C'$.
Teste a sua fórmula nestes casos:
ⓐ $C'_0=(4,0)$, $R'=3$,
ⓑ $C'_0=(6,0)$, $R'=5$,
ⓒ $C'_0=(8,0)$, $R'=5$.

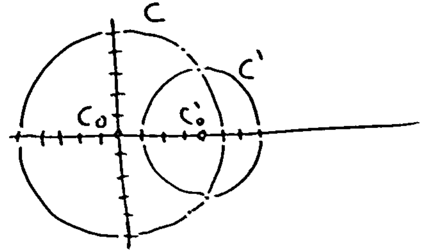
No exercício,

$$E_C(x,y)=(x-C_x)^2+(y-C_y)^2-R^2$$
$$=x^2+y^2-25$$
$$E_{C'}(x,y)=(x-C'_x)^2+(y-C'_y)^2-R'^2$$
$$=(x^2-2C'_x x+C'^2_x)+y^2-R'^2$$
$$E_r(x,y)=E_C(x,y)-E_{C'}(x,y)$$
$$=(-25)-(-2C'_x x+C'^2_x-R'^2)$$
$$=(2C'_x)x+(-25-C'^2_x+R'^2)$$

Testando a fórmula no caso ⓐ:

$$E_r(x,y)=(2\cdot 4)x+(-25-4^2+3^2)$$
$$=8x+(-25-16+9)$$
$$=8x-32$$

Ou seja, $E_x(x,y)=8x-32=0$
se e só se $x-4=0$
ou seja, $x=4$.



O método (algébrico!) pra encontrar $C\cap C'$ é o seguinte: encontre a reta
$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid E_r(x,y)=0\}$
e aí calculamos
$C\cap r$
ou
$C'\cap r$.

O que dá pra fazer com isto?

Muita coisa.
Dá até pra gente resolver problemas de tangência — por exemplo:
Sejam C círculo em $\mathbb{R}^2$,
A ponto em $\mathbb{R}^2$.
Problema:
Encontre as duas retas, s e s', que passam pelo ponto A e são tangentes ao círculo C.

^{2}

$-R'^2)$

$+R'^2)$

$5-4^2+3^2)$

$5-16+9)$

$-32=0$

$-4=0$

$=4.$

O MÉTODO (ALGÉBRICO!) PRA ENCONTRAR $C\cap C'$ É O SEGUINTE: ENCONTRE A RETA

$$r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid E_r(x,y)=0\}$$

E AÍ CALCULAMOS

$$C\cap r \quad \text{OU} \quad C'\cap r.$$

O QUE DÁ PRA FAZER COM ISTO?

MUITA COISA.
DÁ ATÉ PRA GENTE RESOLVER PROBLEMAS DE TANGÊNCIA — POR EXEMPLO:
SEJAM C CÍRCULO EM $\mathbb{R}^2$,
A PONTO EM $\mathbb{R}^2$.

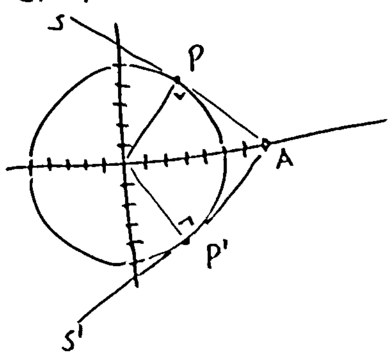
PROBLEMA:
ENCONTRE AS DUAS RETAS, s E s', QUE PASSAM PELO PONTO A E SÃO TANGENTES AO CÍRCULO C.

O TRUQUE PRA ISTO É UM TEOREMA QUE VOCÊS VIRAM NA P1:

TEOREMA:
SEJAM $A,B\in\mathbb{R}^2$.
SEJA $C=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid A\hat{P}B=90°\}$.
ENTÃO C É O CÍRCULO QUE TEM O SEGMENTO AB COMO UM DOS SEUS DIÂMETROS.

EXERCÍCIO/EXEMPLO:
SEJAM $C_0=(0,0)$, $R=5$,
$A=(7,0)$.

ENTÃO:



PROBLEMA:
QUAL É O CÍRCULO
$$C=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid A\hat{P}B=90°\}$$
QUE VAI NOS AJUDAR A RESOLVER O EXERCÍCIO/EXEMPLO?

$$(x^2-2\cdot 6\cdot x+6^2)$$
$$\parallel$$
$$(x-6)^2+(y-7)^2-8^2=0$$
$$C_0=(6,7),\quad R=8$$

$$x^2+y^2-7x=0$$
$$\parallel$$
$$(x^2-7x)+y^2$$

$$\left(x-\tfrac{7}{2}\right)^2+y^2-R^2 = \quad \text{SABEMOS}$$
$$\left(x^2-7x+\tfrac{49}{4}\right)+y^2-R^2 = \quad \text{QUEREMOS}$$
$$x^2-7x \qquad +y^2$$

SE $R=\frac{7}{2}$ TUDO DÁ CERTO.

6/DEZ/2013 B

INTERSEÇÃO DE DOIS CÍRCULOS:

SEJAM $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-C_x)^2 + (y-C_y)^2 - R^2}_{E_C(x,y)} = 0\}$,

$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-C'_x)^2 + (y-C'_y)^2 - R'^2}_{E_{C'}(x,y)} = 0\}$;

REPARE QUE C TEM CENTRO $C_0 = (C_x, C_y)$ E RAIO R, E C' TEM CENTRO $C'_0 = (C'_x, C'_y)$ E RAIO R'.

SEJA $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{E_C(x,y) - E_{C'}(x,y)}_{E_r(x,y)} = 0\}$

... E VAMOS PODER CALCULAR $C \cap C'$ CALCULANDO $C \cap r$ OU $C' \cap r$.

EXERCÍCIO: ENCONTRE $E_r(x,y)$ NO CASO $C_0 = (0,0)$, $R = 5$, $C'_0 = (C'_x, 0)$, $R' \in \mathbb{R}$ (OU SEJA: $C_x = C_y = C'_y = 0$) E TESTE A SUA FÓRMULA NESTES 3 CASOS (REPRESENTE GRAFICAMENTE C, C', r):

(a) $C_0 = (0,0)$, $R = 5$, $C'_0 = (4,0)$, $R' = 3$

(b) $C_0 = (0,0)$, $R = 5$, $C'_0 = (6,0)$, $R' = 5$

(c) $C_0 = (0,0)$, $R = 5$, $C'_0 = (8,0)$, $R' = 5$.

... ISTO VAI NOS AJUDAR A RESOLVER OUTROS PROBLEMAS TAMBÉM - POR EXEMPLO ALGUNS PROBLEMAS DE TANGÊNCIA.

NAS P1s VOCÊS VIRAM ESTE TEOREMA (SEM A PROVA COMPLETA):

> SEJAM $A, B \in \mathbb{R}^2$, E SEJA $C = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid A\hat{P}B = 90°\}$.
> ENTÃO C É UM CÍRCULO, E O SEGMENTO AB É UM DIÂMETRO DESTE CÍRCULO. ||

EXERCÍCIO:
SEJAM $C_0 = (0,0)$, $R = 5$, $A = (8,0)$.

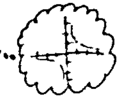
ENCONTRE AS DUAS RETAS, s E s', QUE PASSAM POR A E SÃO TANGENTES A C, E OS PONTOS DE TANGÊNCIA P E P'.

O TRUQUE VAI SER USAR O TEOREMA ACIMA... QUAL É O CÍRCULO C' QUE VOCÊ VAI PRECISAR USAR?

CÔNICAS EM POSIÇÕES NÃO-CANÔNICAS

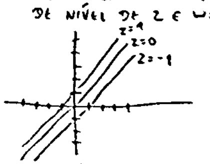
- CÍRCULOS, ELIPSES, PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES SÃO "CÔNICAS".
- CÍRCULO CANÔNICO: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$
- PARÁBOLA CANÔNICA: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 = 0\}$ ...

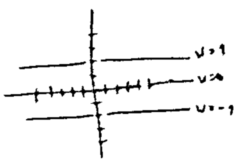
- HIPÉRBOLE CANÔNICA: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 = 0\}$ ...



EXEMPLO:
SEJAM $z = z(x,y) = y - x$
$w = w(x,y) = \frac{y}{2}$

VAMOS VER QUAIS AS CURVAS DE NÍVEL DE z E w:

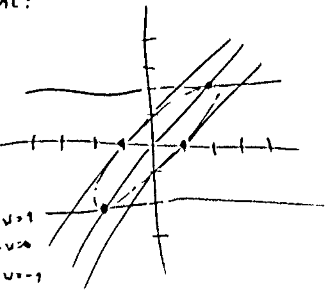




QUAIS SÃO OS PONTOS ÓBVIOS E MAIS-OU-MENOS-ÓBVIOS DO "CÍRCULO" C', ONDE:

$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z^2 + w^2 - 1 = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2 + w(x,y)^2 - 1 = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y-x)^2 + (\tfrac{y}{2})^2 - 1 = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2xy + x^2 + \tfrac{y^2}{4} - 1 = 0\}$$

ISTO É UMA ELIPSE! QUAL?



P2: 13/DEZ!

JANCARLO

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2013.2
P2 - 13/DEZEMBRO/2013
PROF: EDUARDO OCHS

$\boxed{\text{TURMA B}}$

(1) SEJAM C E r UM CÍRCULO E UMA RETA QUE SE INTERSECTAM. MAIS PRECISAMENTE, SEJAM:

$$C_0 = (C_x, C_y)$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-C_x)^2 + (y-C_y)^2 - R^2 = 0\}$$
$$r = \{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

COM $R>0$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $C \cap r \neq \emptyset$.

VAMOS DEFINIR:

$$M = A + Pr_{\vec{v}} \overrightarrow{AC_0}$$
$$\alpha = d(C_0, M)$$
$$\beta = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$$
$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$
$$I = M + \beta\vec{u}$$
$$I' = M - \beta\vec{u}.$$

(a) CALCULE E REPRESENTE GRAFICAMENTE $M, \alpha, \beta, \vec{u}$, I E I' NOS SEGUINTES CASOS:

(I) $C_0 = (2,0)$, $R=5$, $A=(0,3)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-6,0)}$ — 0.5 PTS

(II) $C_0 = (0,0)$, $R=5$, $A=(0,5)$, $\vec{v} = (2,-1)$. — 0.5 PTS

(b) DEMONSTRE - NO CASO GERAL - QUE $I, I' \in C \cap r$. — 2.0 PTS

NOS PROBLEMAS SEGUINTES VAMOS CONSIDERAR:

$$C_0 = (C_x, C_y)$$
$$C_0' = (C_x', C_y')$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-C_x)^2 + (y-C_y)^2 - R^2 = 0\}$$
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-C_x')^2 + (y-C_y')^2 - R'^2 = 0\}$$
$$C \cap C' = \{I, I'\}$$

r É A RETA QUE PASSA POR C_0 E C_0'

s É A RETA QUE PASSA POR I E I'

$r \cap s = \{M\}$.

(2) NO CASO EM QUE $C_0 = (0,0)$, $C_0' = (C_x', 0)$

(a) ENCONTRE A EQUAÇÃO DA RETA s, — 0.2

(b) ENCONTRE AS COORDENAS DE M, — 0.1

(c) ENCONTRE AS COORDENADAS DE I E I', — 0.2

(d) ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA $\alpha = d(C_0, M)$, — 0.5

(e) ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA $\alpha' = d(C_0', M)$, — 0.5

(f) ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA $\beta = d(M,I) = d(M,I')$. — 0.5

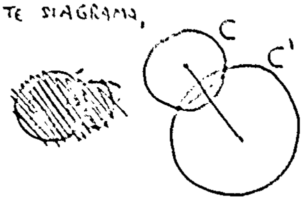
(g) MOSTRE QUE $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$. — 1.0

(h) MOSTRE QUE $\alpha'^2 + \beta^2 = R'^2$. — 1.0

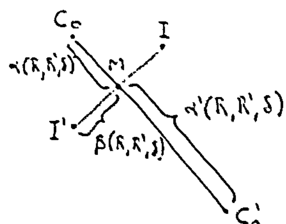
(i) DEFINA FUNÇÕES $\alpha(R, R', C_x')$, $\alpha'(R, R', C_x')$, $\beta(R, R', C_x')$ COM AS FÓRMULAS QUE VOCÊ OBTEVE ACIMA E ENUNCIE AS PROPOSIÇÕES QUE VOCÊ DEMONSTROU NOS ITENS g E h COMO TEOREMAS. — 1.0

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2013.2
P2 - 13/dez/2013
Prof: Eduardo Ochs

(3) Sejam C e C' dois círculos em $\mathbb{R}^2$, com raios R e R' respectivamente, e tais que a distância dos seus centros é δ. Se fizermos este diagrama,



A cruz no meio dele tem estas dimensões:



Prove isto - do seguinte modo:

(a) Defina um vetor unitário na direção "↘" do diagrama, e use ele e $\alpha(R,R',\delta)$ para obter M; $\boxed{1.0}$

(b) Defina um vetor unitário ortogonal ao anterior e use-o (e o $\beta(R,R',\delta)$) para obter I; $\boxed{1.0}$

(c) Prove (por uma conta!) que $d(C_0,I)=R$. $\boxed{2.0}$

(d) Use este método para calcular I e I' no caso em que $C_0=(0,3)$, $R=3$, $C'_0=(4,0)$, $R=4$. $\boxed{2.0}$

18/DEZ/2013 A

COMO DESENHAR CÔNICAS TORTAS

SABEMOS QUE,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\} =$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y=0\} =$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy-1=0\} =$

CÔNICAS NÃO-DEGENERADAS (CANÔNICAS)

E QUE,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\} = \{(0,0)\}$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+1=0\} = \{\}$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\} =$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=0\} =$

CÔNICAS DEGENERADAS (CANÔNICAS)

TRUQUE: VAMOS INVENTAR NOVAS COORDENADAS - SEMPRE COMO FUNÇÕES $z(x,y)$ E $w(x,y)$.

1º EXEMPLO:

SEJAM $z(x,y)=x+y$ E $w(x,y)=\frac{y}{2}$.

EXERCÍCIO: TRACE ALGUMAS CURVAS DE NÍVEL DE $\mathbb{R}^2$, E ENCONTRE OS PONTOS DE $\mathbb{R}^2$ TAIS QUE:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	1
?	?	-1	0
?	?	1	0
?	?	0	-1

DEFS:

$Z_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)=\alpha\}$

$W_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid w(x,y)=\alpha\}$

REPRESENTE GRAFICAMENTE

Z_0, Z_1, Z_{-1},

W_0, W_1, W_{-1}

A PARTIR DISTO COMPLETE A TABELA.

COMO DESENHAR ELIPSES

SEJA $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2+w(x,y)^2-1=0\}$.

(1) OS PONTOS MAIS ÓBVIOS DESTA ELIPSE SÃO ESTES:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	1
?	?	-1	0
?	?	1	0
?	?	0	-1

(2) DESENHE AS TANGENTES À SUA ELIPSE NESTES PONTOS.

(3) IMPROVISE O RESTO. :)

COMO DESENHAR PARÁBOLAS

SEJA $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2-w(x,y)=0\}$

(1) OS PONTOS MAIS ÓBVIOS DESTA PARÁBOLA SÃO:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	0
?	?	1	1
?	?	-1	1
?	?	2	4
?	?	-2	4

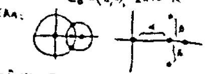
(2) DESENHE AS TANGENTES À SUA PARÁBOLA NESTES PONTOS.

(3) IMPROVISE O RESTO.

P2 - 2ª PARTE

NA 1ª PARTE DA P2 VOCÊ APRENDEU A CALCULAR $\alpha(R,R',\delta)$ E $\beta(R,R',\delta)$, QUE DAVAM AS INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS C COM $C_0=(0,0)$ RAIO R E $C_0'=(\delta,0)$, RAIO R'

A FIGURA ERA:



AGORA VOCÊ VAI FAZER ALGO PARECIDO PARA CÍRCULOS C COM $C_0=(0,R)$, RAIO R E C' COM $C_0'=(R',0)$, RAIO R'

USANDO O MÉTODO NO QUAL A GENTE CALCULA, NESTA ORDEM,

δ (A DISTÂNCIA ENTRE OS CENTROS),

$\alpha(R,R',\delta)$,

$\beta(R,R',\delta)$,

$\vec{v}^u$ UNITÁRIO COM MESMA DIREÇÃO E SENTIDO QUE $\overrightarrow{C_0C_0'}$,

$\vec{w}^u$ UNITÁRIO COM $\vec{v}^u \perp \vec{w}^u$,

M (PONTO MÉDIO DAS INTERSEÇÕES DOS CÍRCULOS)

I, I' (AS INTERSEÇÕES).

(1) DETALHE O MÉTODO PRO CASO GERAL - AQUI BASTA DAR UMA DEFINIÇÃO PRA CADA UM DOS SÍMBOLOS ACIMA

(2) TESTE O SEU MÉTODO NESTES CASOS.

(a) $R=3$, $R'=4$

(b) $R=2$, $R'=5$

18/dez/2013 A

Como desenhar cônicas tortas

Sabemos que

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ =

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y=0\}$ =

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy-1=0\}$ =

Cônicas não-degeneradas (canônicas)

e que:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\} = \{(0,0)\}$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+1=0\} = \{\}$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$ =

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=0\}$ =

Cônicas degeneradas (canônicas)

Truque: vamos inventar novas coordenadas — sempre como funções $z(x,y)$ e $w(x,y)$.

1º exemplo:

Sejam $z(x,y)=x+y$ e $w(x,y)=\frac{y}{2}$.

Exercício: trace algumas curvas de nível de $\mathbb{R}^2$, e encontre os pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que:

x	y	z(x,y)	w(x,y)
?	?	0	1
?	?	-1	0
?	?	1	0
?	?	0	-1

Defs:

$Z_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)=\alpha\}$

$W_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid w(x,y)=\alpha\}$

Represente graficamente Z_0, Z_1, Z_{-1}, W_0, W_1, W_{-1}. A partir disto complete a tabela.

Como desenhar elipses

Seja $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2+w(x,y)^2-1=0\}$.

(1) Os pontos mais óbvios desta elipse são estes:

x	y	z(x,y)	w(x,y)
?	?	0	1
?	?	-1	0
?	?	1	0
?	?	0	-1

(2) Desenhe as tangentes à sua elipse nestes pontos.

(3) Improvise o resto. :)

Como desenhar parábolas

Seja $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2-w(x,y)=0\}$

(1) Os pontos mais óbvios desta parábola são:

x	y	z(x,y)	w(x,y)
?	?	0	0
?	?	1	1
?	?	-1	1
?	?	2	4
?	?	-2	4

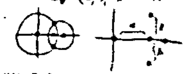
(2) Desenhe as tangentes à sua parábola nestes pontos.

(3) Improvise o resto.

P2 - 2ª parte

Na 1ª parte da P2 você aprendeu a calcular $\alpha(R,R',\delta)$ e $\beta(R,R',\delta)$, que davam as interseções de círculos C com $C_0=(0,0)$ raio R e $C'_0=(\delta,0)$ raio R'.

A figura era:



Agora você vai fazer algo parecido para círculos C com $C_0=(0,R)$, raio R e C' com $C'_0=(R',0)$, raio R' usando o método no qual a gente calcula, nesta ordem,

δ (a distância entre os centros),

$\alpha(R,R',\delta)$,

$\beta(R,R',\delta)$,

$\vec{v}^u$ unitário com mesma direção e sentido que $\overrightarrow{C_0C'_0}$,

$\vec{w}^u$ unitário com $\vec{v}^u \perp \vec{w}^u$,

M (ponto médio das interseções dos círculos)

I, I' (as interseções).

(1) Detalhe o método pro caso geral — aqui basta dar uma definição pra cada um dos símbolos acima

(2) Teste o seu método nestes casos

(a) $R=3$, $R'=4$

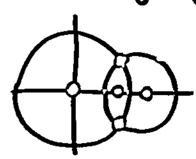
(b) $R=2$, $R'=5$

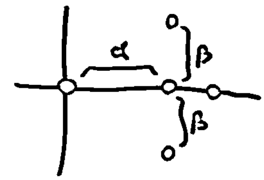
P2 - 2ª PARTE

NA 1ª PARTE DA P2 VOCÊ APRENDEU A CALCULAR $\alpha(R,R',\delta)$ E $\beta(R,R',\delta)$, QUE DAVAM AS INTERSEÇÕES DE CÍRCULOS C COM $C_0=(0,0)$, RAIO R

E $C'_0=(\delta,0)$, RAIO R'...

A FIGURA ERA:





AGORA VOCÊ VAI FAZER ALGO PARECIDO PARA CÍRCULOS C COM $C_0=(0,R)$, RAIO R

E C' COM $C'_0=(R',0)$, RAIO R'

USANDO O MÉTODO NO QUAL A GENTE CALCULA, NESTA ORDEM,

δ (A DISTÂNCIA ENTRE OS CENTROS),

$\alpha(R,R',\delta)$,

$\beta(R,R',\delta)$,

$\vec{v}^u$ UNITÁRIO, COM MESMA DIREÇÃO E SENTIDO QUE $\overrightarrow{C_0C'_0}$,

$\vec{w}^u$ UNITÁRIO COM $\vec{v}^u \perp \vec{w}^u$,

M (PONTO MÉDIO DAS INTERSEÇÕES DOS CÍRCULOS),

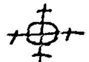
I, I' (AS INTERSEÇÕES).

1. DETALHE O MÉTODO PRO CASO GERAL - AQUI BASTA DAR UMA DEFINIÇÃO PRO CADA UM DOS SÍMBOLOS ACIMA.
2. TESTE O SEU MÉTODO NESTES CASOS:
   - (a) $R=3$, $R'=4$
   - (b) $R=2$, $R'=5$

18/Dez/2013 A

Como desenhar cônicas tortas

Sabemos que:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y=0\}$ = 

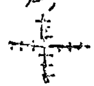
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy-1=0\}$ = 

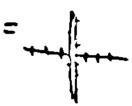
Cônicas não-degeneradas (canônicas)

E que:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\} = \{(0,0)\}$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+1=0\} = \emptyset$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=0\}$ = 

Cônicas degeneradas (canônicas)

Truque: vamos inventar novas coordenadas — sempre como funções $z(x,y)$ e $w(x,y)$.

1º exemplo:

Sejam $z(x,y)=x+y$ e $w(x,y)=\frac{y}{2}$.

Exercício: trace algumas curvas de nível de $\mathbb{R}^2$, e encontre os pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	1
?	?	−1	0
?	?	1	0
?	?	0	−1

Defs:

$Z_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)=\alpha\}$

$W_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid w(x,y)=\alpha\}$

Representem graficamente $Z_0, Z_1, Z_{-1}, W_0, W_1, W_{-1}$ e a partir disto complete a tabela.

Como desenhar elipses

Seja $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2+w(x,y)^2-1=0\}$.

1. Os pontos mais óbvios desta elipse são estes:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	1
?	?	−1	0
?	?	1	0
?	?	0	−1

2. Desenhe as tangentes à sua elipse nestes pontos.
3. Improvise o resto. :)

Como desenhar parábolas

Seja $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2-w(x,y)=0\}$

1. Os pontos mais óbvios desta parábola são:

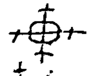
x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	0
?	?	1	1
?	?	−1	1
?	?	2	4
?	?	−2	4

2. Desenhe as tangentes à sua parábola nestes pontos.
3. Improvise o resto.

18/dez/2013 | A

Como desenhar cônicas tortas

Sabemos que:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y=0\}$ = 

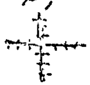
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy-1=0\}$ = 

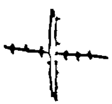
Cônicas não-degeneradas (canônicas)

E que:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\} = \{(0,0)\}$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+1=0\} = \emptyset$,

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=0\}$ = 

Cônicas degeneradas (canônicas)

Truque: vamos inventar novas coordenadas — sempre como funções $z(x,y)$ e $w(x,y)$.

1º exemplo:
Sejam $z(x,y)=x+y$ e $w(x,y)=\frac{y}{2}$.

Exercício: trace algumas curvas de nível de $\mathbb{R}^2$, e encontre os pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que:

x	y	z(x,y)	w(x,y)
?	?	0	1
?	?	-1	0
?	?	1	0
?	?	0	-1

Defs:

$Z_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)=\alpha\}$

$W_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid w(x,y)=\alpha\}$

Represente graficamente Z_0, Z_1, Z_{-1}, W_0, W_1, W_{-1} e partir disto complete a tabela.

Como desenhar elipses

Seja $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2+w(x,y)^2-1=0\}$.

(1) Os pontos mais óbvios desta elipse são estes:

x	y	z(x,y)	w(x,y)
?	?	0	1
?	?	-1	0
?	?	1	0
?	?	0	-1

(2) Desenhe as tangentes à sua elipse nestes pontos.

(3) Improvise o resto. :)

Como desenhar parábolas

Seja $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2-w(x,y)=0\}$

(1) Os pontos mais óbvios desta parábola são:

x	y	z(x,y)	w(x,y)
?	?	0	0
?	?	1	1
?	?	-1	1
?	?	2	4
?	?	-2	4

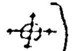
(2) Desenhe as tangentes à sua parábola nestes pontos.

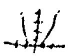
(3) Improvise o resto.

18/dez/2013 $\boxed{E}$

Hoje: cônicas tortas!

Lembre que:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy-1=0\}$ = 

Cô-ni-cas não de-ge-ne-ra-das,

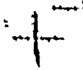
E que.

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\} = \{(0,0)\}$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+1=0\} = \emptyset$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x(x-1)=0\}$ = 

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=0\}$ = 

Cônicas degeneradas

Truque: nós vamos definir sistemas de coordenadas novos definindo
$z(x,y)=ax+by+c$,
$w(x,y)=dx+ey+f$,
e vamos começar com este exemplo:
$z(x,y)=x+y$,
$w(x,y)=\frac{y}{2}$

Notação pras curvas de nível:
$Z_\alpha=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)=\alpha\}$,
$W_\alpha=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid w(x,y)=\alpha\}$.

Exercício:
desenhe, num gráfico só,
$Z_0, Z_1, Z_{-1}, W_0, W_1, W_{-1}$
e usando este gráfico complete:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	1
?	?	-1	0
?	?	1	0
?	?	0	-1

Como desenhar círculos tortos (elipses)

Seja: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2+w(x,y)^2-1=0\}$

1. Encontre os quatro pontos mais óbvios desta elipse, que são os da tabela acima, e desenhe-os em $\mathbb{R}^2$.
2. Encontre as tangentes à elipse nestes pontos (isto é novidade!) e represente-as em $\mathbb{R}^2$.
3. Improvise o resto. :)

(Obs: se você quiser caprichar você pode encontrar os pontos mais ou menos óbvios da elipse...)

Como desenhar parábolas tortas

Seja: $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2-w(x,y)=0\}$

Os 5 pontos mais óbvios desta parábola são:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
?	?	0	0
?	?	1	1
?	?	-1	1
?	?	2	4
?	?	-2	4

1. Represente estes 5 pontos em $\mathbb{R}^2$
2. Encontre as tangentes à parábola nestes pontos e represente-as em $\mathbb{R}^2$.
3. Improvise o resto.

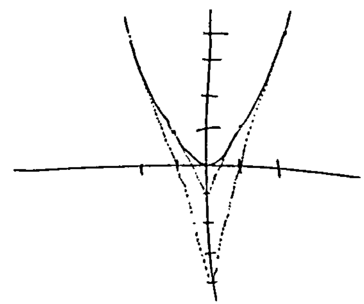
Como desenhar hipérboles tortas

Seja $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)\,w(x,y)-1=0\}$.

Os 6 pontos mais óbvios desta hipérbole são:

x	y	$z(x,y)$	$w(x,y)$
		1	1
		-1	-1
		2	1/2
		-2	-1/2
		1/2	2
		-1/2	-2

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2+w(x,y)^2-1=0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+y)^2+\left(\tfrac{y}{2}\right)^2-1=0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2xy+y^2+\tfrac{1}{4}y^2-1=0\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2xy+\tfrac{5}{4}y^2-1=0\}$$



Qual é a reta tangente à $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ no ponto $(1,0)$?

20/dez/2013 A

- O que PODE cair sobre cônicas na P3/VR e na P4/VS?

Resp: quase qualquer problema que só dependa do que vocês viram até hoje.

- O que vocês vão usar mais de cônicas quando vocês crescerem?

Resp: distinguir algebricamente elipses, parábolas e hipérboles; encontrar eixos, focos e assíntotas; desenhar, parametrizar e reparametrizar.

Nossos z e w favoritos (por enquanto):

$z(x,y) = x+y$

$w(x,y) = \frac{y}{2}$

Cônicas tortas associadas a estes z e w.

$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2 + w(x,y)^2 - 1 = 0\}$

$P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2 - w(x,y) = 0\}$

$H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)w(x,y) = 0\}$

Como parametrizar cônicas?

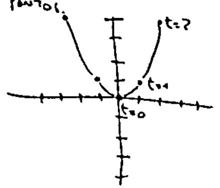
Idéia (caso canônico):

$C_c = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid \theta\in\mathbb{R}\}$

$P_c = \{(t, t^2) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$H_c = \{(t, 1/t) \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$.

Exercício: desenhem P_c e H_c anotando no seu gráfico os valores de t associados a alguns pontos.



Idéia (caso geral):

$C = \{A + (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{w} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$

$P = \{A + t\vec{v} + t^2\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$H = \{A + t\vec{v} + \frac{1}{t}\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

Exercício: desenhem P e H anotando no gráfico os valores de t associados a alguns pontos nestes casos:

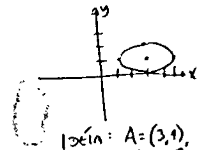
1) P quando $A=0$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$,

2) H quando $A=0$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,\frac{1}{2})}$.

3) C quando $A=0$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(-1,0)}$

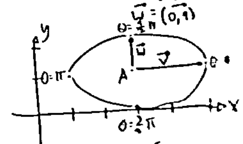
Como usar isto pra parametrizar cônicas não-canônicas?

4) Encontre $A, \vec{v}, \vec{w}$ que façam com que C seja esta elipse.

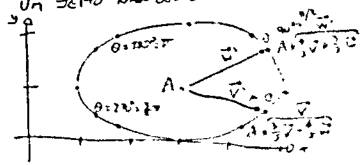


1

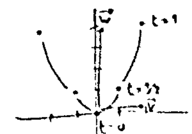
Idéia: $A=(3,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$



Um jeito não-óbvio

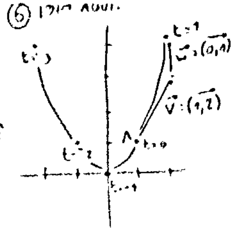


5) Encontre $A, \vec{v}, \vec{w}$ que façam com que P seja esta parábola (parametrizada de uma forma não-canônica).

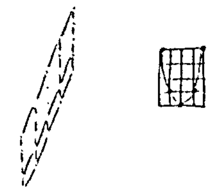


Resp $A=(0,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,4)}$

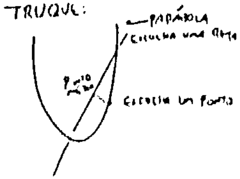
6) Idem aqui.



Truque. Se já temos $A, \vec{v}, \vec{w}$ é fácil desenhar a parábola. Faça este grid e desenhe os pontos mais úteis dela e as tangentes neles.



TRUQUE:



20/dez/2013 | B

Hoje: Última aula "séria" antes da P3/VR e da P4/VS...

O que pode cair sobre cônicas na P3 e na P4?

Resp: quase todos os problemas "autocontidos" que só dependam do que vocês viram até hoje e de coisas explicitadas na própria prova...

- Quais são as coisas mais úteis sobre cônicas? Quais vocês vão usar mais quando vocês crescerem?

Resp (parcial): parametrizações e reparametrizações, identificar elipses, hipérboles e parábolas pelas suas equações, como desenhar...

Na aula passada fizemos:

$z(x,y) = x+y$,
$w(x,y) = \frac{y}{2}$

$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2 + w(x,y)^2 - 1 = 0\}$,
$P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2 - w(x,y) = 0\}$,
$H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)w(x,y) = 0\}$

Cônicas parametrizadas

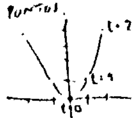
Canônicas:

$C_c = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid \theta\in\mathbb{R}\}$

$P_c = \{(t, t^2) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$H_c = \{(t, \frac{1}{t}) \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

Exercício: Represente graficamente P_c e H_c anotando os "t"s associados a vários pontos.



Cônicas tortas parametrizadas

Sejam:

$E = \{A + (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{w} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$

$P = \{A + t\vec{v} + t^2\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}$

$H = \{A + t\vec{v} + \frac{1}{t}\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}, t\neq 0\}$

Exercício:

Represente graficamente P (com os "t"s associados) nos casos:

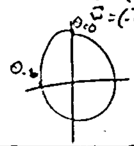
① $A=(0,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$,

② $A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,2)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$.

Agora com H:

③ $A=(0,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,\frac{1}{3})}$

④ $A=(0,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(-1,0)}$

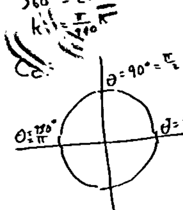


Círculos com parametrizações estranhas

Truque:

$0° = 0$
$90° = \frac{\pi}{2}$
$180° = \pi$
$360° = 2\pi$
$k° = \frac{\pi}{180}k$

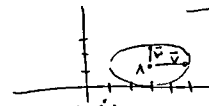
C_c:



⑤ $A=(0,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w}=(0,-1)$

⑥ $A=(0,0)$, $\vec{v}=(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$, $\vec{w}=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

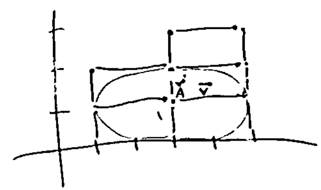
Agora encontre uma parametrização para esta elipse:



isto é:

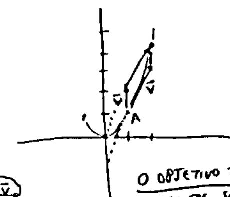
$E = \{A + (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{w} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$.

Se a gente desenhar um grid tudo isso fica óbvio!



No caso da parábola:

Se $A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,2)}$, $\vec{w}=(0,1)$,



O objetivo disto é a gente ser capaz de olhar um parábola (ou elipse, ou hipérbole) representada graficamente, e aí conseguir uma parametrização pra ela — ou seja, uma primeira descrição como conjunto — e depois obter o polinômio.

Repr. gráfica $\underset{\text{fácil}}{\overset{\text{fácil}}{\rightleftarrows}}$ parametrizada

parametrizada $\xrightarrow{\text{fácil}}$ por polinômio em x,y; por polinômio em x,y $\xrightarrow{\text{difícil}}$ parametrizada

Repr. gráfica $\xrightarrow{\text{difícil}}$ por polinômio em x,y

Como obter os polinômios?

Exemplo:

$z(x,y) = \underset{1}{a}x + \underset{1}{b}y + \underset{0}{c}$

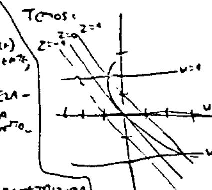
$w(x,y) = \underset{0}{d}x + \underset{1/2}{e}y + \underset{0}{f}$

Então: $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix}$

No caso de

$P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)^2 - w(x,y) = 0\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (ax+by+c)^2 - (dx+ey+f) = 0\}$

Temos:



$P = \{(0,0) + t\overrightarrow{(1,0)} + t^2\overrightarrow{(-2,-2)} \mid t\in\mathbb{R}\}$...

Porquê?

8/JAN/2011

ESCLARECIMENTOS SOBRE A P3/VR E A P4/VS...
(O MODO COMO A NOTA FINAL É CALCULADA É COMPLICADO!)

VAMOS CHAMAR AS MAIORES NOTAS NA P1, P2, P3 E P4 DE ALGUÉM O "N1" E O "N2" DAQUELA PESSOA.

① SE $\frac{N1+N2}{2} \geq 6$ A PESSOA PASSOU DIRETO (MAS ISSO É RARO).

② SE $\frac{N1+N2}{2} \geq 4$ A GENTE FINGE QUE A PESSOA FICOU EM VS E QUE A NOTA DA VS É A N1 (A MAIOR NOTA).

③ SE ISSO NÃO ACONTECER EU VOU OLHAR PRA TODAS AS PROVAS DA PESSOA, PRA QUESTÕES QUE TRATEM DE:
ⓐ DEMONSTRAR COISAS
ⓑ TESTAR COISAS
ⓒ SEGUIR MÉTODOS
ⓓ INVENTAR MÉTODOS
ⓔ REPRESENTAÇÃO GRÁFICA
(ETC, ETC, ETC)
E FAZER UMA CONTA MEDINDO QUANTAS DESSAS COISAS A PESSOA SABE FAZER E QUÃO BEM.

CÔNICAS

COISAS BÁSICAS:
① REPRESENTAR GRAFICAMENTE CÔNICAS TORTAS.

COISAS NÃO-BÁSICAS:
② PASSAGEM ENTRE FORMA PARAMETRIZADA E FORMA POLINOMIAL.
③ CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS.

ISTO É UM POLINÔMIO DE 2º GRAU EM X E Y:

$$F(x,y) = ax^2 + bx + cxy + d + ey + fy^2$$

NOTAÇÃO: PODEMOS ESCREVER OS COEFICIENTES NESTA FORMA:

$$\begin{array}{|c|c|c|} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{array}$$

EXEMPLO:

$$\begin{array}{|c|c|c|} 1 & & \\ & & \\ -25 & & 1 \end{array}(x,y) = 1x^2 + 0x + 0xy + -25 + 0y + y^2$$

CÍRCULO DE RAIO 5 CENTRADO NA ORIGEM:

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{|c|c|c|} 1 & & \\ & & \\ -25 & & 1 \end{array}(x,y) = 0\right\}$$

TRUQUE (PARTE 1):

$$\begin{array}{|c|c|c|} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{array}(x,y) = \begin{array}{|c|c|c|} a & & \\ & c & \\ & & f \end{array}(x,y) + \begin{array}{|c|c|c|} & & \\ b & & \\ & e & \end{array}(x,y) + \begin{array}{|c|c|c|} & & \\ & & \\ d & & \end{array}(x,y)$$

PARTE HOMOGÊNEA DE GRAU 2

IDEM, GRAU 1

IDEM, GRAU 0 ("CONSTANTE")

TRUQUE (PARTE 2):
PRA GENTE DESCOBRIR SE $\begin{array}{|c|c|c|} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{array}$ É ELIPSE, PARÁBOLA OU HIPÉRBOLE BASTA DESCOBRIR SE $\begin{array}{|c|c|c|} a & & \\ & c & \\ & & f \end{array}$ É ELIPSE, PARÁBOLA OU HIPÉRBOLE.

EXERCÍCIO:
EXPRESSE ISTO

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \boxed{(x-2)^2+(y-3)^2-25} = 0\}$$

NA FORMA $\begin{array}{|c|c|c|} \; & & \\ \; & \; & \\ \; & \; & \; \end{array}$.

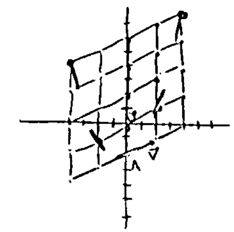
TRUQUE (PARTE 3):
PRA VER SE $\begin{array}{|c|c|c|} a & & \\ & b & \\ & & c \end{array}$ É ELIPSE, PARÁBOLA OU HIPÉRBOLE CALCULAMOS $\Delta = b^2 - 4ac$...
E AÍ:
QUANDO $\Delta < 0 \Rightarrow$ ELIPSE,
$\Delta = 0 \Rightarrow$ PARÁBOLA,
$\Delta > 0 \Rightarrow$ HIPÉRBOLE.

TRUQUE (PARTE 4):
PORQUE ISSO?
LEMBRE QUE HIPÉRBOLES SÃO COISAS DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)\,w(x,y) - 1 = 0\}$$

(VEJA OS QUADROS DAS ÚLTIMAS AULAS!)

LEMBRE QUE TÍNHAMOS
$z(x,y) = ax + by + c$,
$w(x,y) = dx + ey + f$;
SUPONHA QUE $r_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)=0\}$
E $r_w = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid w(x,y)=0\}$
SÃO RETAS NÃO-PARALELAS.



EXERCÍCIOS
(DE REPRESENTAR GRAFICAMENTE CÔNICAS TORTAS):

SEJAM: $\vec{v} = \overline{(2,1)}$,
$\vec{w} = \overline{(0,2)}$,
$A = (0,-2)$,

$$P = \{A + t\vec{v} + t^2\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}.$$

ⓐ REPRESENTE GRAFICAMENTE P.

ⓑ OUTRO: $A = (-1,0)$
$\vec{v} = \overline{(1,-1)}$
$\vec{w} = \overline{(0,1)}$

ⓒ OUTRO, MAIS COMPLICADO:
$A = (0,0)$
$\vec{v} = \overline{(-1,-1)}$
$\vec{w} = \overline{(1,-2)}$

8/JAN/2013 | B

ESCLARECIMENTOS SOBRE COMO SERÃO CALCULADAS AS MÉDIAS FINAIS...

VOCÊS VÃO TER 4 NOTAS DE PROVA: A DA P1, A DA P2, A DA P3/VR E A P4/VS.
VAMOS CHAMAR AS DUAS MAIORES DE N1 E N2.

(1) SE $\frac{N1+N2}{2} \geq 6.0$ A PESSOA PASSOU DIRETO.

(2) SE $\frac{N1+N2}{2} \geq 4.0$ A PESSOA "FICOU DE VS", E A NOTA DELA NA "VS" É A MAIOR NOTA DAS PROVAS (N1).

(3) SE NÃO (CASO MAIS COMUM!) EU VOU OLHAR TODAS AS PROVAS E VER SE A PESSOA FEZ QUESTÕES SOBRE:
- DEMONSTRAR COISAS
- ENUNCIAR COISAS
- TESTAR RESULTADOS
- REPRESENTAÇÃO GRÁFICA
- ETC ETC (VÁRIOS ITENS)

E CALCULAR UMA PONTUAÇÃO A PARTIR DISTO SEGUNDO UMA FÓRMULA QUE AINDA NÃO ESTÁ PRONTA.

NA P3/VR E NA P4/VS VAI TER QUESTÕES DE DEMONSTRAR COISAS SOBRE A MATÉRIA DA P1 E DA P2, E UM POUQUINHO DE COISAS SOBRE CÔNICAS TORTAS.

(A) REVISÃO ⇧

(B) CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS

CÔNICAS PARAMETRIZADAS:

$$P=\{A+t\vec{v}+t^2\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$H=\{A+t\vec{v}+\tfrac{1}{t}\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$
$$E=\{A+(\cos\theta)\vec{v}+(\operatorname{sen}\theta)\vec{w} \mid \theta\in\mathbb{R}\}$$

VAMOS VER O CASO DA PARÁBOLA:

(a) EXEMPLO: $A=(0,-2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$.

EXERCÍCIOS (TAMBÉM COM PARÁBOLAS):

(b) $A=(0,2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$

(c) $A=(0,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(-1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,-2)}$

CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS

LEMBRE QUE UM POLINÔMIO DE GRAU 2 EM X E Y É ALGO DA FORMA:

$$F(x,y)=ax^2+bx+cxy+d+ey+fy^2$$

NOTAÇÃO:

$$\begin{smallmatrix} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{smallmatrix}(x,y) = ax^2+bx+cxy+d+ey+fy^2$$

EXEMPLO: O CÍRCULO DE RAIO 5 É

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & & \\ -25 & & 1 \end{smallmatrix}(x,y)=0\}$$

EXERCÍCIO: REPRESENTE ISTO

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2+(y-3)^2-25=0\}$$

NA FORMA $\begin{smallmatrix} \square & & \\ \square & \square & \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$.

TRUQUE (PARTE 1):

PRA VER SE $\begin{smallmatrix} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{smallmatrix}$ É UMA ELIPSE, PARÁBOLA OU HIPÉRBOLE SEPARAMOS $\begin{smallmatrix} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{smallmatrix}$ EM TRÊS POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS:

$$\underbrace{\begin{smallmatrix} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{smallmatrix}(x,y)}_{F} = \underbrace{\begin{smallmatrix} a & & \\ & c & \\ & & f \end{smallmatrix}(x,y)}_{F_2} + \underbrace{\begin{smallmatrix} & & \\ b & & \\ & e & \end{smallmatrix}(x,y)}_{F_1} + \underbrace{\begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ d & & \end{smallmatrix}(x,y)}_{F_0}$$

TRUQUE (PARTE 2):

BASTA OLHAR PARA F_2, $\begin{smallmatrix} a & & \\ & c & \\ & & f \end{smallmatrix}$.

SEJA $\Delta=c^2-4af$.

QUANDO $\Delta>0 \Rightarrow$ HIPÉRBOLE,
$\Delta=0 \Rightarrow$ PARÁBOLA,
$\Delta<0 \Rightarrow$ ELIPSE.

PORQUÊ?

O CASO DA HIPÉRBOLE É O MAIS SIMPLES DE ENTENDER...
LEMBRE QUE UMA HIPÉRBOLE É

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)w(x,y)-1=0\}$$

(VEJA OS QUADROS DAS ÚLTIMAS AULAS), ONDE

$$r_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z(x,y)=0\} \text{ E}$$
$$r_w=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid w(x,y)=0\}$$

SÃO RETAS NÃO-PARALELAS...

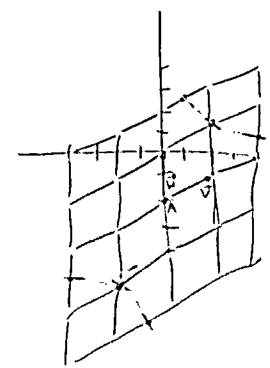
HIPÉRBOLES PARAMETRIZADAS

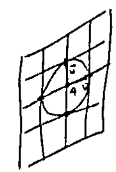
ESBOCE $H=\{A+t\vec{v}+\frac{1}{t}\vec{w} \mid t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ PARA:

(a) $A=(0,-2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,2)}$

(b) $A=(0,2)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$

(c) $A=(0,0)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(-1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,-2)}$





NOTAS, VISTA DE PROVA, DÚVIDAS, ATENDIMENTO, ETC: A PARTIR DAS 15:00 NO LLARC!