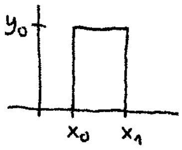
CÁLCULO II
2009.2
PROF: EDUARDO OCHS
16/NOV/2009

EXERCÍCIOS DE INTEGRAL DE RIEMANN - PARA SEREM FEITOS EM CASA, EM GRUPOS DE ATÉ 3 PESSOAS, E ENTREGUES.
ESTES EXERCÍCIOS VALEM O EQUIVALENTE A 1.0 PONTOS DA PRIMEIRA PROVA, MAS VÃO SER ACRESCENTADOS À NOTA DA SEGUNDA PROVA.

$\boxed{\text{DICA IMPORTANTE:}}$ ELES NÃO SÃO "PARECIDOS COM PROBLEMAS QUE PODEM CAIR NA SEGUNDA PROVA", MAS O TIPO DE VISUALIZAÇÃO QUE ELES ENVOLVEM VAI AJUDAR <u>MUITO</u> EM QUESTÕES DA SEGUNDA PROVA - ENTÃO RECOMENDO QUE VOCÊS USEM ESTES EXERCÍCIOS COMO UM MODO DE ESTUDAR INTEGRAL DE RIEMANN EM GRUPO, E QUE VOCÊS APRENDAM A RESOLVER QUESTÕES DESTE TIPO MUITO BEM...

① SEJA $f(x) = 1/x$, E LEMBRE QUE A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE $y_0 \cdot (x_1 - x_0)$ É UM RETÂNGULO:



E QUE O VALOR DE $y_0 \cdot (x_1 - x_0)$ É A ÁREA DESTE RETÂNGULO.
REPRESENTE GRAFICAMENTE CADA UMA DAS SOMAS DE RIEMANN ABAIXO:

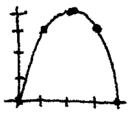
a) $\sum_i f(x_i)$, PARA: oops, $(x_i - x_{i-1})$
$\{x_0, \ldots, x_2\} = \{1/2, 1, 2\}$,
$\{x_0, \ldots, x_3\} = \{1/4, 1/2, 1, 2\}$
$\{x_0, \ldots, x_4\} = \{1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$

b) $\sum_i (x_i - x_{i-1})$ PARA AS MESMAS TRÊS PARTIÇÕES ACIMA. oops, $f(x_{i-1})$

c) AGORA CALCULE O VALOR DE CADA UMA DAS SEIS SOMAS DE RIEMANN ACIMA, E COMPARE-OS COM OS DAS INTEGRAIS CORRESPONDENTES - $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, ONDE a E b SÃO OS EXTREMOS DA PARTIÇÃO.

= CALCULE $\sum_i f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
E $\sum_i f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ PARA
$\{x_0, \ldots, x_{100}\} = \{1/2^{100}, 1/2^{99}, \ldots, 1\}$ E
$\{x_0, \ldots, x_{100}\} = \{1, 2, 4, 2^{100}\}$.

② SEJA $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
O GRÁFICO DE f É:



PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO,
$P_1 = \{0, 1, 2, 3\}$,
$P_2 = \{0, 1/2, 1, 3/2, \ldots, 3\}$,
$P_4 = \{0, 1/4, 2/4, 3/4, \ldots, 3\}$

REPRESENTE GRAFICAMENTE AS SOMAS DE RIEMANN
$\sum_i f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
E
$\sum_i f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

E DEFINA FORMALMENTE (POR CASOS) AS FUNÇÕES-ESCADA
$g_1 : [0,3] \to \mathbb{R}$,
$g_2 : [0,3] \to \mathbb{R}$, E
$g_4 : [0,4] \to \mathbb{R}$

CUJOS GRÁFICOS "SÃO" AS SOMAS DE RIEMANN $\sum_i f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, E AS FUNÇÕES-ESCADA
$h_1 : [0,3] \to \mathbb{R}$,
$h_2 : [0,3] \to \mathbb{R}$,
$h_4 : [0,3] \to \mathbb{R}$

CUJOS GRÁFICOS "SÃO" AS SOMAS DE RIEMANN $\sum_i f(x_i)(x_i - x_{i-1})$.

AGORA REPRESENTE GRAFICAMENTE AS FUNÇÕES
$\underline{f}_n : [0,3] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \min(g_n(x), h_n(x))$

E $\overline{f}_n : [0,3] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \max(g_n(x), h_n(x))$

E AS FUNÇÕES:
$k_n : [0,3] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)$

$\boxed{\text{ENTREGAR EM 23/NOV/2009.}}$

Cálculo 2
PURO-UFF - 2010.1
Exercícios
7/abril/2010

① Calcule arcsen s para $s=0$, $s=\pm\frac{1}{2}$, $s=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $s=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $s=\pm 1$, e calcule cos arcsen s para cada um destes valores de s.

② Mostre que $\cos \operatorname{arcsen} s = \sqrt{1-s^2}$ para todo s em $[-1,1]$.

③ Calcule as integrais abaixo. (Sempre verifique as suas respostas!)

a) $\int \frac{1}{(2x+3)^4}\,dx$

b) $\int \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}\,dx$

c) $\int \frac{x^2+3x}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$

Tente aplicar o método de Heaviside ao item c acima. O que acontece?

④ Mostre que:

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \frac{1}{27}\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

Repare que a substituição não está indicada. Quem é u? Complete todos os detalhes.

b) $\int \frac{x}{\sqrt{25+x^2}}\,dx = k\int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,du$

(Aqui você também vai ter que determinar o valor de k).

⑤ Vimos que a substituição que nos livra do $\sqrt{1-s^2}$ em

$$\int \sqrt{1-s^2}\, s^3\, ds$$

é:

$$\left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

⇐ o $\sqrt{1-s^2}$ é a "parte malvada" do integrando $\sqrt{1-s^2}\,s^3$.

Aprenda a fazer os seus próprios "bloquinhos de substituições", e faça os que começam com:

a) $t = \tan\theta$

b) $z = \sec\theta$

⑥ Use as idéias do exercício (4) para simplificar cada integral dos problemas 1-18 da p. 546 do livro. Você deve chegar a "versões simplificadas" nas quais a "parte malvada" do integrando $\underbrace{\text{é}}_{\text{sempre}}$ de uma destas três formas:

$\sqrt{1-s^2}$, $\sqrt{1+t^2}$ ou $\sqrt{z^2-1}$.

⑦ Tente resolver as "versões" simplificadas" que você obteve no exercício (6).

⑧ Calcule $\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Se você conseguiu resolver o exercício (2) você deve ser capaz de simplificar as expressões com arcsen que você vai obter.

Outros exercícios recomendados
(Todos do Thomas/Finney/Weir/Giordano):

p.54,	23-26	(funções trigonométricas inversas)
p.55,	39	($\operatorname{sen} x \approx x$)
p.355,	27	(aditividade de integrais)
p.365,	33-36	(área)
p.375,	19-24	(área)
p.546,	1-18	(substituição trigonométrica)

Cálculo 2 - 2010.2
PURO-UFF - 25/Agosto/2010
Prof: Eduardo Ochs

$\boxed{\text{Exercícios sobre funções - pág. 1}}$

Pra começar: Relembre os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e gráfico de uma função, que você viu em Cálculo 1, e:

① Represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

a) $A=\{(1,1),(2,1),(3,1),(3,2)\}$

b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

c) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$

d) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2+y^2=1\}$ — isto é um 2

e) $E=B\cup D$

f) $F=B\cap D$

g) $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\{-1,0,1,2\},\ y=x^2\}$

② Quais dos conjuntos da questão anterior são gráficos de funções? Justifique, e para cada um dos que são gráficos de funções diga o domínio e a imagem da função correspondente.

③ O produto cartesiano de dois conjuntos $A,B\subseteq\mathbb{R}$ é definido da seguinte forma:

$$A\times B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in A,\ y\in B\}.$$

Se $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{2,4\}$ então $A\times B$ tem seis pontos. Represente $A\times B$ graficamente.

④ Represente graficamente os conjuntos:

$$R=[1,4)\times(2,3],$$
$$S=[2,3]\times[1,3),$$
$$T=R\cap S.$$

Use português para explicar o que acontece nas bordas dos retângulos. Lembre que o objetivo de um gráfico ou diagrama é fazer o leitor entender o que você representou nele!

⑤ Seja

$$C'=C\cap[-2,2]\times(1,2),$$

onde C é o conjunto do item c da questão ①:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$$

O conjunto C' é o gráfico de uma função? Se for diga o domínio e a imagem desta função.

⑥ Isto é o que chamamos de "definição formal" de uma função:

$$\begin{aligned} f: [-1,2] &\to [0,5] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Esta notação tem muita informação, e ela vai ser muito importante neste curso e nos seguintes. Vamos dissecá-la:

Nome da função — Domínio de f — Contradomínio de f

$$\begin{aligned} f : [-1,2] &\to [0,5] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Para cada valor de x no domínio...

... esta expressão diz como calcular sua imagem. Obs: note que "imagem" tem dois sentidos diferentes - $f(2)=2^2=4$ é a imagem de $x=2$ por f, e é um número; a imagem de f é o conjunto $[0,4]$.

Além desta "definição formal" ser uma definição para f, ela também é uma afirmação; ela diz que para cada valor de x em $[-1,2]$ (o domínio), a expressão x^2 faz sentido, e o seu resultado pertence a $[0,5]$ (o contradomínio).

Afirmações podem ser falsas, e da mesma forma que a afirmação

$$x+1=x+2$$

é falsa - e está errada - é errado dizer que:

$$\begin{aligned} g: [-1,2] &\to [0,1] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

E que:

$$\begin{aligned} h: [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1/x \end{aligned}$$

E que:

$$\begin{aligned} q: [-1,+1] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{x}{x}. \end{aligned}$$

Porquê?

CÁLCULO 2 - 2010.2
PURO-UFF - 25/AGOSTO/2010
PROF: EDUARDO OCHS

EXERCÍCIOS SOBRE
FUNÇÕES - PAG. 2

(7) DEFINIÇÕES FORMAIS DE FUNÇÕES PODEM SER UM POUCO MAIS COMPLICADAS - POR EXEMPLO QUANDO AS USAMOS PARA DEFINIR FUNÇÕES COM NOMES ESTRANHOS...

SE f E g SÃO FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$ PODEMOS DEFINIR A "SOMA" E O "PRODUTO" DE f E g, QUE TAMBÉM VÃO SER FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$.

A NOTAÇÃO É:

$$\begin{aligned} f+g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} fg : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underbrace{(fg)(x)} = \underbrace{f(x)g(x)} \end{aligned}$$

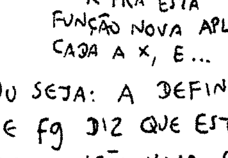
ONDE: ESTA PARTE DIZ QUE NOTAÇÃO VAMOS USAR PRA ESTA FUNÇÃO NOVA APLICADA A x, E... ... ESTA PARTE DIZ COMO CALCULAR $(fg)(x)$.

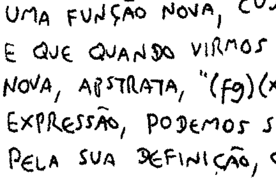
OU SEJA: A DEFINIÇÃO FORMAL DE fg DIZ QUE ESTAMOS DEFININDO UMA FUNÇÃO NOVA, CUJO NOME É fg, E QUE QUANDO VIRMOS A NOTAÇÃO NOVA, ABSTRATA, "$(fg)(x)$", NUMA EXPRESSÃO, PODEMOS SUBSTITUÍ-LA PELA SUA DEFINIÇÃO, QUE É "$f(x)g(x)$".

a) DIGAMOS QUE $f(x) = x+1$
E $g(x) = -2x$.

FAÇA UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA $ff+g$ E CALCULE - PASSO A PASSO, EXPLICANDO EM PORTUGUÊS O QUE NÃO FOR ÓBVIO, - $(ff+g)(5)$.

b) DIGAMOS QUE f E g SÃO FUNÇÕES-ESCADA DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$, COM ESTES GRÁFICOS:





ONDE $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

...REPRESENTE GRAFICAMENTE AS FUNÇÕES $f+g$ E fg.

c) UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA A FUNÇÃO f DO ITEM ANTERIOR É:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{QUANDO } x \in (-\infty, x_1), \\ y_1 & \text{QUANDO } x \in [x_1, x_3], \\ y_4 & \text{QUANDO } x \in (x_3, x_4), \\ 0 & \text{QUANDO } x \in [x_4, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO FORMAL "BOA" PARA $f+g$.

d) ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO FORMAL "BOA" PARA fg.

e) [redacted] SE f E g TÊM O MESMO DOMÍNIO, DIZEMOS QUE:

- $f=g$, QUANDO $f(x)=g(x)$ PARA TODO x,
- $f\neq g$, QUANDO $f(x)\neq g(x)$ PARA ALGUM x,
- $f\leq g$, QUANDO $f(x)\leq g(x)$ PARA TODO x,
- $f\not\leq g$, QUANDO $f(x)\leq g(x)$ É FALSO PARA ALGUM x,

E ASSIM POR DIANTE.

MOSTRE QUE SE $y_1=1$, $y_2=2$, $y_3=3$, $y_4=4$ ENTÃO, PARA AS FUNÇÕES f E g DO ITEM b, TEMOS $f\neq g$ E $f\not\leq g$.

f) ENCONTRE VALORES PARA y_1, y_2, y_3, y_4 PARA OS QUAIS A AFIRMAÇÃO $f\leq g$ SEJA VERDADEIRA.

g) SUPONHA QUE $a < x_1$ E $x_6 < b$.
MOSTRE QUE QUANDO CALCULAMOS

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx \quad \text{E} \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

OBTEMOS O MESMO RESULTADO.

(OBS: A GENERALIZAÇÃO DESTA PROVA SERVE PRA MOSTRAR QUE A REGRA DA ADIÇÃO PARA INTEGRAIS É CONSEQÜÊNCIA DE REGRAS MAIS BÁSICAS. VAMOS VER ISTO DEPOIS.)

Cálculo 2
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
5/setembro/2010

Obtendo novas fórmulas por substituição

Vou começar com um exemplo.
Sabemos que

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

se a, b, c, d são números; isto também vale se a, b, c, d são expressões cujos valores são números...

Se $c=a$ e $d=b$ então podemos substituir cada "c" na igualdade acima por "a" e cada "d" por "-b", e obtemos:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= aa + a(-b) + ba + b(-b)\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

E agora se $a=2$ e $b=x+y+z+w$ temos:

$$(2+x+y+z+w)(2-x-y-z-w) = 4-(x+y+z+w)^2$$

Isto vai ser verdade sempre que x, y, z, w forem números, e seria trabalhoso checar esta fórmula diretamente...

Muitas fórmulas em matemática são provadas pegando fórmulas conhecidas, substituindo algumas variáveis, e manipulando um pouco a fórmula obtida depois da substituição. É muito difícil seguir uma série de substituições sem explicações do que está sendo feito em cada passo, então costumamos usar um pouco de português pra ajudar...

Repare:

Sabemos que:
$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Isto indica que vamos mencionar uma fórmula conhecida

Fazendo as substituições
$c := a,$
$d := -b$

Se a gente não avisar explicitamente que variáveis estão mudando e como, o leitor vai ter que descobrir por si mesmo... se a gente escreve tudo claramente fica fácil verificar se fizemos tudo direito, qualquer colega nosso pode nos ajudar a encontrar erros que tivermos deixado passar, etc...

obtemos
$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

O passo intermediário ajuda o leitor a ver que $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ é verdade

E substituindo
$a := 2,$
$b := x+y+z+w$
obtemos
$$\begin{aligned}&(2+x+y+z+w)(2-x-y-z-w)\\ &= 4-(x+y+z+w)^2\end{aligned}$$

O TFC 2 diz que se uma função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ obedece certas condições (mas vamos ignorar as condições por enquanto... depois vamos ver como levá-las em consideração) então:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Substituindo
$F(x) := -\cos x,$
$a := 0,$
$b := \pi$

[redacted]

Temos
$$\begin{aligned}F'(x) &= -\left(\tfrac{d}{dx}\cos x\right)\\ &= -(-\operatorname{sen} x)\\ &= \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

e
$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx &= \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi}\\ &= (-\cos\pi)-(-\cos 0)\\ &= 1-(-1)\\ &= 2.\end{aligned}$$

Na aula de 1º/~~agosto~~ setembro vimos que é possível escrever em português todo o raciocínio que fazemos para encontrar a fórmula inicial certa (no caso do problema "$\int_{x=0}^{x=\pi}\operatorname{sen} x\,dx = ?$" era o TFC 2), para encontrar os F, a e b adequados, e para testar se tudo dava certo... mas por enquanto não vai ser importante escrever tudo isto — por enquanto vamos treinar principalmente escrever demonstrações da forma "sabemos que / substituindo / temos".

(1) A regra da cadeia nos diz que
$$\tfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$
Se fazemos $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$ e usamos que $e^{\ln x}=x$ e que $\frac{d}{dx}x=1$ podemos deduzir que $1 = x\cdot\ln' x$.
Escreva isto com todos os detalhes.

(2) Uma regra de integração chamada "integração por substituição" pode ser demonstrada por esta série de igualdades:

$$\begin{array}{ccc}\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & \overset{(\text{TFC 2})}{=} & \Big[f(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b}\\ & & \|\\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du & \overset{(\text{TFC 2})}{=} & \Big[f(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)}\end{array}$$

Repare que podemos usá-la direto,
$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \overset{(\text{subst})}{=} \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

Vire

CÁLCULO 2
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
5/SETEMBRO/2010

OBTENDO NOVAS FÓRMULAS POR SUBSTITUIÇÃO - CONTINUAÇÃO

... OU PODEMOS USÁ-LA COMO UMA SÉRIE DE TRÊS IGUALDADES ("$\_ \overset{(TFC2)}{=} \_ = \_ \overset{(TFC2)}{=} \_$").

(2a) PROVE QUE

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \int_{u=0}^{u=\pi/2} 2 \operatorname{sen} 2u \, du \qquad \Leftarrow \boxed{1}$$

A PARTIR DA FÓRMULA

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \overset{(SUBST)}{=} \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du .$$

(2b) PROVE A EQUAÇÃO $\boxed{1}$ (DO ITEM 2a) A PARTIR DA FÓRMULA

$$\int_{x=g(a)}^{x=g(b)} f'(x)\,dx \overset{(SUBST)}{=} \int_{u=a}^{u=b} f'(g(u))g'(u)\,du .$$

(2c) PROVE A EQUAÇÃO $\boxed{1}$ SEM USAR A FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO, SÓ USANDO O TFC2 DUAS VEZES.
(REPARE QUE VOCÊ VAI CHEGAR NUMA PROVA UM POUCO MAIS LONGA QUE AS DOS ITENS 2a E 2b, MAS QUE VAI SER ACEITÁVEL POR ALGUÉM QUE NÃO CONFIE NA FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO)

(3) PROVE QUE

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(4x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{x=4\alpha}^{x=4\beta} f(x)\,dx .$$

(4) PROVE QUE

$$\int_{x=-\beta}^{x=-\alpha} \ln(-x)\,dx = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} \ln(x)\,dx$$

QUANDO $0<\alpha\leq\beta$.

(5) PROVE QUE

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

QUANDO α E β SÃO POSITIVOS.

(6) PROVE QUE

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

QUANDO α E β SÃO AMBOS NEGATIVOS.

(7) PROVE QUE

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} \frac{1}{x-r}\,dx = \Big[\ln|x-r|\Big]_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

QUANDO r NÃO ESTÁ ENTRE α E β.

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO - MODO RÁPIDO

EXISTEM VÁRIAS NOTAÇÕES DIFERENTES (MAS EQUIVALENTES ENTRE SI) PRA NOS AJUDAR A APLICAR A FÓRMULA

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

MAIS RÁPIDO. A MINHA NOTAÇÃO PREFERIDA PARA ISTO - INSPIRADA NA NOTAÇÃO USADA NO LIVRO DO SPIVAK - USA "BLOQUINHOS DE SUBSTITUIÇÃO" PRA INDICAR TUDO QUE MUDA:

$$\int_{x=2}^{x=3} (\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x\,dx = \begin{bmatrix} x^2=u \\ x=\sqrt{u} \\ 2x\,dx=du \end{bmatrix} \int_{u=4}^{u=9} \operatorname{sen} u\,du$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \begin{bmatrix} g(x)=u \\ x=g^{-1}(u) \\ g'(x)\,dx=du \end{bmatrix} \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

Cálculo 2
2010.2 - PURO/UFF
Prof: Eduardo Ochs
Exercícios de preparação
para a P1 - 15/set/2010

Dica importante: quando você for resolver estes exercícios em casa escreva as suas respostas finais com todos os detalhes, e com todas as explicações em português... Imagine que você vai mandar as suas respostas para a sua tia Stephania, e que ela está há meses com um mau-humor de dar medo e sem nenhuma boa vontade pra ler coisas que não estão muito claras. Ou então pense no objetivo real destes exercícios, e deste curso e dos próximos: você quer aprender a encontrar argumentos matemáticos corretos, e quer ser capaz de convencer outras pessoas com eles - mesmo que elas tenha só um conhecimento básico do assunto.

Lembre que nas disciplinas mais básicas de CC e EP todos os alunos aprendem os mesmos métodos de resolução, que estão explicados detalhadamente nos livros; nas disciplinas menos básicas grupos diferentes de alunos podem ter que aprender métodos diferentes, muito menos bem explicados nos livros, e podem ter que apresentar estes métodos para os outros - ou fazer trabalhos em conjunto; e nas disciplinas mais avançadas você muitas vezes vai ter que criar os seus próprios métodos.

(1) Na última aula usamos a substituição $s=\cos\theta$ para resolver

$$\int_{\theta=a}^{\theta=b} \operatorname{sen}^2\theta\,(\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta,$$

e um dos truques que utilizamos era que $\cos^2\theta = 1-\operatorname{sen}^2\theta$. Se escrevemos num "bloquinho de substituição" tudo que está sendo trocado, temos:

$$\int_{\theta=a}^{\theta=b} \operatorname{sen}^2\theta\,(\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \left[\begin{array}{l} s=\operatorname{sen}\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta \\ \cos^2\theta = 1-s^2 \end{array}\right] \int_{s=\operatorname{sen} a}^{s=\operatorname{sen} b} s^2(1-s^2)\,ds$$

Esta linha é o truque extra.

Uma das técnicas mais importantes de integração - "substituição trigonométrica" - também envolve um truque extra - só que um pouco mais complicado. Para resolver, por exemplo,

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = ?$$

podemos fazer $s=\operatorname{sen}\theta$, e aí, quando $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, temos

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta,$$

e:

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[\begin{array}{l} s=\operatorname{sen}\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta \\ \sqrt{1-s^2}=\cos\theta \end{array}\right] \int \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\,d\theta.$$

(1a) Use a idéia acima para encontrar uma função $F(s)$ tal que $F'(s) = s\sqrt{1-s^2}$.

(1b) Use a resposta do (1a) para calcular

$$\int_{s=a}^{s=b} s\sqrt{1-s^2}\,ds.$$

(1c) Uma idéia bem parecida nos permite resolver integrais nas quais aparece um "$\sqrt{1+t^2}$" no integrando, usando a substituição $t=\tan\theta$; aí, para alguns valores de θ vamos ter $\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$. Complete os detalhes, e depois procure no seu livro de Cálculo três problemas diferentes que possam ser resolvidos por este método e resolva-os.

(1d) Mostre que nem sempre temos $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta$.

(1e) Mostre que nem sempre temos $\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$.

(2) Mostre que

$$\int_{x=\alpha(t)}^{x=\beta(t)} F'(x)\,dx = F(\beta(t)) - F(\alpha(t)),$$

e use isto para calcular

$$\int_{x=2t}^{x=3t} e^{4x}\,dx.$$

(3) Use as idéias da questão anterior para calcular

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a}^{x=t} F'(x)\,dx.$$

(4) Numa das listas de exercícios anteriores você provou que $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$. Use isto para mostrar que

$$\int \frac{(a_1+a_2)x - (a_1r_2+a_2r_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}\,dx = \int \frac{a_1}{x-r_1} + \frac{a_2}{x-r_2}\,dx = a_1\ln|x-r_1| + a_2\ln|x-r_2|.$$

CÁLCULO 2
2010.2 - PURO/UFF
PROF: EDUARDO OCHS

GABARITO DE ALGUNS DOS EXERCÍCIOS DE PREPARAÇÃO PARA A P1 - 20/SET/2010

OBS: A GRANDE DIFICULDADE DE MUITOS ALUNOS ACABA SENDO EM COMO ESCREVER DIREITO AS DEMONSTRAÇÕES... EU PREPAREI ESTA FOLHA PRINCIPALMENTE PRAS PESSOAS TEREM MAIS EXEMPLOS DE DEMONSTRAÇÕES.

(1a) SE $s = \operatorname{sen}\theta$

ENTÃO $\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

E $ds = \cos\theta\, d\theta$;

COMO $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
TEMOS $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$,
E QUANDO $\cos\theta \geq 0$
TEMOS $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$
$= \sqrt{1-s^2}$.

VAMOS USAR A TÉCNICA DE FAZER CONTAS COM ALGUNS PASSOS DUVIDOSOS MAS DEPOIS CONFERIR OS RESULTADOS.

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen}\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \end{array}\right] \int \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int -\cos^2\theta \cdot (-\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos\theta = c \\ -\operatorname{sen}\theta\, d\theta = dc \end{array}\right] \int -c^2\, dc$$

$$= -\frac{c^3}{3} = -\frac{\cos^3\theta}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{1-s^2}^{\,3}$$

QUEREMOS CONFERIR SE ISTO É VERDADE:

$$\int_{s=a}^{s=b} s\sqrt{1-s^2}\,ds \overset{(TFC2?)}{=} \left[-\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2}\right]_{s=a}^{s=b}$$

SE $F(s) = -\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2}$

VAMOS TER:

$$\int_{s=a}^{s=b} F'(s)\,ds \overset{(TFC2)}{=} F(s)\Big|_{s=a}^{s=b} = \left[-\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2}\right]_{s=a}^{s=b}$$

COMO

$$F'(s) = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}\cdot(-2s)\right) = s\sqrt{1-s^2},$$

ENCONTRAMOS A FUNÇÃO $F(s)$ QUE OBEDECE A CONDIÇÃO PEDIDA NO ENUNCIADO, E DE QUEBRA APRENDEMOS A CALCULAR ESTA INTEGRAL:

$$\int_{s=a}^{s=b} s\sqrt{1-s^2}\,ds = \left[-\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2}\right]_{s=a}^{s=b}.$$

(QUE É A RESPOSTA DA QUESTÃO 1b).

(2) SABEMOS, PELO TFC2, QUE:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \overset{(TFC2)}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

FAZENDO AS SUBSTITUIÇÕES
$a = \alpha(t)$,
$b = \beta(t)$,
NA FÓRMULA ACIMA, TEMOS:

$$\int_{x=\alpha(t)}^{x=\beta(t)} F'(x)\,dx \overset{(TFC2)}{=} F(x)\Big|_{x=\alpha(t)}^{x=\beta(t)}$$
$$= F(\beta(t)) - F(\alpha(t))$$

E SUBSTITUINDO
$\alpha(t) = 2t$,
$\beta(t) = 3t$,
$F(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$

TEMOS $F'(x) = e^{4x}$ E

$$\int_{x=2t}^{x=3t} e^{4x}\,dx = \left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_{x=2t}^{x=3t}$$
$$= \frac{1}{4}e^{12t} - \frac{1}{4}e^{8t}.$$

(3) NA QUESTÃO ANTERIOR PROVAMOS QUE:

$$\int_{x=\alpha(t)}^{x=\beta(t)} F'(x)\,dx = F(\beta(t)) - F(\alpha(t)),$$

DERIVANDO OS DOIS LADOS DESTA IGUALDADE EM t TEMOS:

$$\frac{d}{dt}\int_{x=\alpha(t)}^{x=\beta(t)} F'(x)\,dx = \frac{d}{dt}\Big(F(\beta(t)) - F(\alpha(t))\Big)$$

FAZENDO
$\alpha(t) = a$ (CONSTANTE)
E $\beta(t) = t$

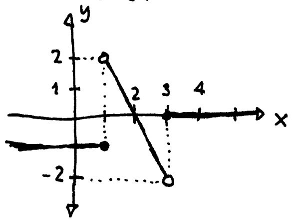
TEMOS

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a}^{x=t} F'(x)\,dx = \frac{d}{dt}\big(F(t) - F(a)\big)$$
$$= F'(t).$$

CÁLCULO 2 - PURO/UFF
1ª PROVA (P1) - 22/SET/2010
PROF: EDUARDO OCHS

(1) SEJA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ A FUNÇÃO CUJO GRÁFICO É:

$\boxed{\text{1: 3.5 PONTOS NO TOTAL}}$



NOTE QUE ESTE GRÁFICO É FORMADO POR DUAS SEMI-RETAS E UM SEGMENTO DE RETA.

(a) DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL, POR CASOS, DA FUNÇÃO f. $\boxed{\text{1a: 0.5 PTS}}$

(b) SEJA $F(x)=\int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$. (NOTE QUE $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.) MOSTRE COMO CALCULAR $F(\alpha)$ QUANDO $\alpha\in(1,3)$ $\boxed{\text{1b: 1.0 PTS}}$

E ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA O VALOR DE $F(\alpha)$ NESTE INTERVALO (ESTA FÓRMULA NÃO DEVE ENVOLVER O SINAL "$\int$"!)

(c) "CALCULE" $F(\alpha)$ NO CASO GERAL - ISTO É, ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO FORMAL, POR CASOS, PARA $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ QUE NÃO ENVOLVA O SINAL DE INTEGRAL. $\boxed{\text{1c: 1.0 PTS}}$

(d) TRACE O GRÁFICO DA FUNÇÃO F. $\boxed{\text{1d: 1.0 PTS}}$

(2) MOSTRE QUE $\int_{x=-2}^{x=3} f(|x|)\,dx = 2\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx + \int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx$. $\boxed{\text{2: 2.5 PTS}}$

(PARA QUALQUER f!)

(3) CONVENÇA A TIA STEPHANIA DE QUE $\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_{x=a}^{x=b}$ $\boxed{\text{3: 1.5 PTS}}$

SEMPRE QUE a E b SÃO OU AMBOS POSITIVOS OU AMBOS NEGATIVOS.

(4) CALCULE

$$\int_{x=a}^{x=b} (\alpha+\operatorname{sen}(x+\beta))^k (\cos(x+\beta))\,dx$$ $\boxed{\text{4: 2.5 PTS}}$

PARA $\alpha,\beta,k\in\mathbb{R}$, CONSTANTES, $k\neq -1$.

(5) CALCULE: $\boxed{\text{5: 2.0 PTS}}$

(a) $\int \frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+3}\,dx$,

(b) $\int_{x=a}^{x=b} \frac{22x+6}{(x-2)(x+3)}\,dx$,

(c) $\int_{x=-2}^{x=1} \frac{22x+6}{(x-2)(x+3)}\,dx$.

A PROVA É PRA SER FEITA EM DUAS HORAS, SEM CALCULADORA E SEM CONSULTA A NADA ALÉM DAS FOLHAS DA PRÓPRIA PROVA E À FOLHA A4 COM AS SUAS ANOTAÇÕES MANUSCRITAS, QUE VOCÊ DEVE TER PREPARADO EM CASA E TRAZIDO, E QUE DEVE SER ENTREGUE JUNTO COM A PROVA.

IDAS AO BANHEIRO SÓ SÃO PERMITIDAS NOS PRIMEIROS 30 MINUTOS DA PROVA.

VOCÊ PODE FAZER PERGUNTAS AO PROFESSOR DURANTE A PROVA, MAS NÃO PODE CONFIAR NAS RESPOSTAS. É PROIBIDO INTERAGIR COM OS COLEGAS OU TROCAR MATERIAL COM ELES.

A CORREÇÃO IRÁ JULGAR O QUE VOCÊ ESCREVEU, E É IMPOSSÍVEL LER O QUE VOCÊ PENSOU MAS NÃO ESCREVEU.

PELO MENOS METADE DOS PONTOS DA CORREÇÃO SERÃO DADOS PELA TIA STEPHANIA; OS CRITÉRIOS DE CORREÇÃO DELA FORAM DISCUTIDOS EXAUSTIVAMENTE NA SALA DE AULA E NAS LISTAS DE EXERCÍCIOS.

LEMBRE QUE CÁLCULO 2 - E VÁRIOS OUTROS CURSOS DE MATEMÁTICA - SÃO CURSOS SOBRE ESCRITA MATEMÁTICA, E QUE TÊM UMA EMENTA DESPROPORCIONALMENTE GRANDE. NÃO É VERGONHA NENHUMA FAZÊ-LOS DUAS OU TRÊS VEZES, E DAS PRIMEIRAS VEZES VOCÊ SÓ SE FAMILIARIZAR COM OS CONCEITOS E AS CONTAS - MAS NÃO ESPERE SER APROVADO ATÉ VOCÊ CONSEGUIR ESCREVER AS SUAS SOLUÇÕES DE MODO CLARO, PRECISO E LEGÍVEL!... ;)

BOA PROVA!

CÁLCULO 2 - PURO/UFF
1ª PROVA (P1) - 22/SET/2010
PROF: EDUARDO OCHS

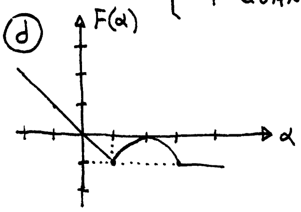
GABARITO

(1) (a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{QUANDO } x \leq 1 \\ 4-2x & \text{QUANDO } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{QUANDO } 3 \leq x \end{cases}$$

(b) QUANDO $\alpha \in (1,3)$ TEMOS:
$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{t=0}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\ &= \int_{t=0}^{t=1} f(t)\,dt + \int_{t=1}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\ &= \int_{t=0}^{t=1} -1\,dt + \int_{t=1}^{t=\alpha} 4-2t\,dt \\ &= -1 + 4(\alpha-1) - [t^2]_{t=1}^{t=\alpha} \\ &= -5 + 4\alpha - (\alpha^2 - 1) \\ &= -4 + 4\alpha - \alpha^2 \end{aligned}$$

(c) QUANDO $\alpha \in (-\infty, 1]$ TEMOS
$$F(\alpha) = \int_{t=0}^{t=\alpha} -1\,dt = -\alpha,$$
E QUANDO $\alpha \in [3, \infty)$ TEMOS
$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{t=0}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\ &= \int_{t=0}^{t=1} f(t)\,dt + \int_{t=1}^{t=3} f(t)\,dt + \int_{t=3}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\ &= -1 + 0 + 0, \end{aligned}$$
ENTÃO:
$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\alpha \mapsto \begin{cases} -\alpha & \text{QUANDO } \alpha \in (-\infty, 1], \\ -4+4\alpha-\alpha^2 & \text{QUANDO } \alpha \in (1,3), \\ -1 & \text{QUANDO } \alpha \in [3, \infty). \end{cases}$$

(d)



(2) TEMOS
$$f(|x|) = \begin{cases} f(-x) & \text{QUANDO } x < 0, \\ f(x) & \text{QUANDO } x \geq 0, \end{cases}$$
ENTÃO
$$\begin{aligned} \int_{x=-2}^{x=3} f(|x|)\,dx &= \int_{x=-2}^{x=0} f(-x)\,dx + \int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx \\ &= \int_{u=2}^{u=0} f(u)(-du) + \int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx + \int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx + \int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx + \int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

(3) COMO $e^{\ln x} = x$,
$$\begin{aligned} 1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} e^{\ln x} &= (e^{\ln x})\left(\frac{d}{dx} \ln x\right) \\ &= x \left(\frac{d}{dx} \ln x\right), \end{aligned}$$
E $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$.

COMO $\ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & \text{QUANDO } x<0, \\ \ln x & \text{QUANDO } x>0, \end{cases}$

ENTÃO $\frac{d}{dx} \ln|x| = \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{QUANDO } x<0, \\ \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} & \text{QUANDO } x>0, \end{cases}$

E $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ QUANDO $x \neq 0$.

VAMOS DEFINIR:
$$F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln|x|$$
SE $a \leq b$ E $0 \notin [a,b]$, ENTÃO A FUNÇÃO F ESTÁ DEFINIDA NO INTERVALO $[a,b]$, E F' TAMBÉM, E PODEMOS APLICAR O TFC 2:
$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \overset{(TFC2)}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = [\ln|x|]_{x=a}^{x=b}$$
SE $b<a$ (E $0 \notin [b,a]$) PODEMOS FAZER
$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = -\int_{x=b}^{x=a} \frac{1}{x}\,dx \overset{(*)}{=} -[\ln|x|]_{x=b}^{x=a} = [\ln|x|]_{x=a}^{x=b},$$
ONDE A IGUALDADE "(*)" É CONSEQUÊNCIA DO RESULTADO ANTERIOR.

(4) SE $u = x+\beta$ ENTÃO dx E du É:
$$\int_{x=a}^{x=b} (\alpha + \operatorname{sen}(x+\beta))^k (\cos(x+\beta))\,dx = \int_{u=a+\beta}^{u=b+\beta} (\alpha + \operatorname{sen} u)^k (\cos u)\,du,$$
E SE $s = \operatorname{sen} u$ ENTÃO $ds = \cos u\,du$, E
$$\int_{u=a+\beta}^{u=b+\beta} (\alpha + \operatorname{sen} u)^k (\cos u)\,du = \int_{s=\operatorname{sen} a+\beta}^{s=\operatorname{sen} b+\beta} (\alpha+s)^k\,ds;$$
SE $w = \alpha + s$ ENTÃO $dw = ds$ E
$$\int_{s=\operatorname{sen} a+\beta}^{s=\operatorname{sen} b+\beta} (\alpha+s)^k\,ds = \int_{w=\alpha+\operatorname{sen} a+\beta}^{w=\alpha+\operatorname{sen} b+\beta} w^k\,dw = \left[\frac{w^{k+1}}{k+1}\right]_{w=\alpha+\operatorname{sen} a+\beta}^{w=\alpha+\operatorname{sen} b+\beta}.$$

(5a)
$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+3}\,dx &= \alpha \int \frac{1}{x-2}\,dx + \beta \int \frac{1}{x+3}\,dx \\ &= \alpha \ln|x-2| + \beta \ln|x+3|. \end{aligned}$$

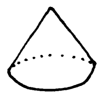
(5b) SE $\alpha = 10$ E $\beta = 12$ ENTÃO
$$\frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+3} = \frac{10}{x-2} + \frac{12}{x+3} = \frac{10(x+3)+12(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{22x+6}{(x-2)(x+3)}$$
E, USANDO A IGUALDADE QUE PROVAMOS NA 5a, TEMOS
$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} \frac{22+6}{(x-2)(x+3)}\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} \frac{10}{x-2} + \frac{12}{x+3}\,dx \\ &= [10 \ln|x-2| + 12 \ln|x+3|]_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

(5c) SE $a = -2$ E $b = 1$ ISTO VIRA:
$$\big(\underbrace{10 \ln \underbrace{|1-2|}_{1}}_{0} + 12 \ln \underbrace{|1+3|}_{4}\big) - \big(10 \ln \underbrace{|-2-2|}_{4} + \underbrace{12 \ln \underbrace{|-2+3|}_{1}}_{0}\big) = 2 \ln 4.$$

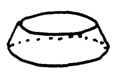
Cálculo 2 - PURO/UFF
2010.2 - Prof: Eduardo Ochs
Exercícios de preparação para a P2
16/nov/2010

A área de um tronco de cone

Isto é um cone:



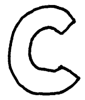
E isto é um tronco de cone:



Isto é um Pac-Man:

Isto é um Pac-Man similar ao de cima, mas menor:

Isto é um Pac-Man grande menos um Pac-Man pequeno:



Estamos interessados em pegar troncos de cones e descobrir suas áreas. Mais precisamente, estamos interessados em calcular a área da parte da superfície de um tronco de cone que quando é planificada vira uma diferença de Pac-Mans.

Preparação

Precisamos saber descrever de vários modos - geometricamente (isto é, graficamente), em português e em matematiquês (como conjuntos) - vários tipos de objetos...

(1) Represente graficamente os conjuntos abaixo (obs: o símbolo "(☆)" indica um item no qual é melhor você primeiro expressar o conjunto como uma lista finita de pontos e depois representar esta lista graficamente):

(1a) $\{(2,3), (4,5)\}$

(1b) $\{(2,t) \mid t\in\{1,2,3,4\}\}$ (☆)

(1c) $\{(t,f(t)) \mid t\in\{-1,0,1,2\}\}$, (☆)

onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 4-x^2$

(1d) $\{(t^2,t^3) \mid t\in\{-2,-1,0,1,2\}\}$ (☆)

(1e) $\{(2,3)+t(-1,0) \mid t\in\{0,1,2,3\}\}$ (☆)

(Obs: aqui não estamos fazendo a distinção que às vezes se faz entre pontos e vetores:
$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$,
$k(a,b)=(ka,kb)$)

(1f) $\{(2,3)+t(-1,0) \mid t\in\{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 3\}\}$ (☆)

(1g) $\{(2,3)+t(-1,0) \mid t\in[0,3]\}$

(1h) $\{(2,3)+t(-1,0) \mid t\in(0,3)\}$

(Obs: aqui o "(0,3)" é um intervalo aberto. Você tem que saber distinguir pelo contexto quando é que "(a,b)" é um ponto e quando é um intervalo. Fique esperto!)

(1i) $\{(2,3)+t(-1,0) \mid t\in\{0,3\}\}$ (☆)

(1j) $\{(2,3)+t(-1,0) \mid t\in(0,3)\}\ \cup$
$\{(2,3)+t(-1,0) \mid t\in\{0,1,2,3\}\}$ (☆)

(Obs: "∪" é "união"!)

(1k) $\{t(2,3)+(1-t)(4,5) \mid t\in\{0,1\}\}$ (☆)

(1l) $\{t(2,3)+(1-t)(4,5) \mid t\in\{0, 0.5, 1\}\}$ (☆)

(1m) $\{t(2,3)+(1-t)(4,5) \mid t\in[0,1)\}$

(1n) $\{t(2,3)+(1-t)(4,5) \mid t\in[-2,-1]\cup[0,1]\}$

(1o) $\{t(2,3)+(1-t)(4,5) \mid t\in[0,\infty)\}$

(1p) $\{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid \theta\in\{0,\frac{\pi}{2},\pi\}\}$ (☆)

(1q) $\{(2+3\cos\theta, 4+5\cos\theta) \mid \theta\in\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi\}\}$ (☆)

(1r) $\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \mid r\in\{1,2\},\ \theta\in\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi\}\}$ (☆)

(1s) $\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \mid r\in\{1,2\},\ \theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]\}$

(1t) $\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \mid r\in[1,2],\ \theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]\}$

Cálculo 2 - PURO/UFF
Exercícios de preparasão para a P2
17/nov/2010
2010.2 - Prof: Eduardo Ochs

(2) Calcule os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

(2a) $\{t(1,2,3)+(1-t)(3,4,5) \mid t \in \{0,\frac{1}{2},1\}\}$

(2b) $\{(2, 3\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid \theta \in \{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi\}\}$

(2c) $\{t(2,3\cos\theta,3\,\mathrm{sen}\,\theta) + (1-t)(4,5\cos\theta,5\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid t \in \{0,1\}, \theta \in \{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi\}\}$

(3) Descreva e se possível represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

(3a) $\{t(1,2,3)+(1-t)(3,4,5) \mid t \in [0,1]\}$

(3b) $\{(2, 3\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid \theta \in [0,2\pi)\}$

(3c) $\{(2, 3\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

(3d) $\{(2, 3\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid \theta \in [0,\pi]\}$

(3e) $\{t(2,3\cos\theta,3\,\mathrm{sen}\,\theta) + (1-t)(4,5\cos\theta,5\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid t \in [0,1], \theta \in \mathbb{R}\}$

(3f) $\{t(2,3\cos\theta,3\,\mathrm{sen}\,\theta) + (1-t)(4,5\cos\theta,5\,\mathrm{sen}\,\theta) \mid t \in [0,1], \theta \in [0,\pi]\}$

(4) Podemos considerar que (x,y) e (x,y,z) são notações "deitadas" para vetores:

$$(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Descreva estes conjuntos,

(4a) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \cos\theta\\0 & \mathrm{sen}\,\theta\end{pmatrix}(t,2t) \mid t \in [1,2], \theta \in [0,2\pi]\right\}$

(4b) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \cos\theta\\0 & \mathrm{sen}\,\theta\end{pmatrix}(x,f(x)) \mid x \in [-2,2], \theta \in [0,\pi]\right\}$

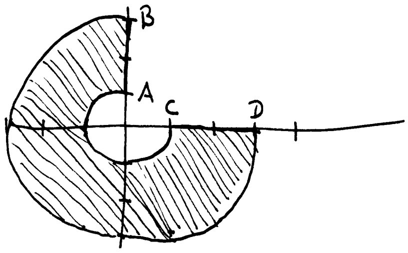
onde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4-x^2$

(4c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \cos\theta\\0 & \mathrm{sen}\,\theta\end{pmatrix}(x,f(x)) \mid x \in [1,\right.$

onde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{quando } x \leq 2, \\ x-1 & \text{quando } x \in (2,3), \\ 2 & \text{quando } x \geq 3. \end{cases}$$

(5) Considere esta figura:



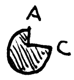
Encontre expressões "em matematiquês" para descrever:

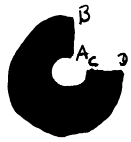
(5a) O segmento AB,

(5b) O segmento CD,

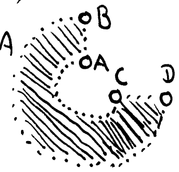
(5c) O arco de círculo que passa por A e C,

(5d) O arco de círculo que passa por B e D,

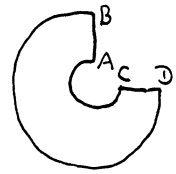
(5e) O "pacman interno", 

(5f) A figura 

, incluindo as bordas;

(5g) A figura 

, que é a anterior sem as bordas;

(5h) A figura 

(só as bordas - você pode usar o sinal de união)

(6) Calcule o comprimento dos conjuntos que você obteve nos itens 5a, 5b, 5c, 5d, 5h.

(7) Calcule a área dos conjuntos que você obteve nos itens 5e e 5f.

Cálculo 2 - PURO/UFF
Exercícios de preparação para a P2
22/nov/2010
2010.2 - Prof: Eduardo Ochs

Exercícios de preparação para a P2

Vamos definir os conjuntos $C(r,\theta)$ e $D(r_1, r_2, \theta)$ da seguinte forma:

$$C(r,\theta) = \{ r(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \mid \alpha \in [0,\theta] \},$$
$$D(r_1,r_2,\theta) = \{ r(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \mid r \in [r_1,r_2],\ \alpha\in[0,\theta] \}.$$

(8a) Calcule o comprimento de $C(3,\pi)$.

(8b) Calcule a área de $D(1,5,\pi)$.

(8c) Calcule o comprimento de $C(r,\theta)$ no "caso geral", quando r é um real não-negativo qualquer e θ é qualquer valor pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$. Note que "caso geral" é um jargão matemático bastante comum...

(8d) Represente graficamente os conjuntos $C(2, 2\pi)$ e $C(-2, 2\pi)$.

(8e) Represente graficamente os conjuntos $C(1, -2\pi)$ e $C(1, -4\pi)$.

(8f) Represente graficamente os conjuntos $C(1, 2\pi)$ e $C(1, 4\pi)$.

(8g) Calcule a área de $D(r_1,r_2,\theta)$ no "caso geral", quando $0\le r_1 \le r_2$ e $\theta\in[0,2\pi]$.

(8h) Calcule a área de
$$\{(x,y) \mid \cancel{x\in[0,\theta], y\in[0}\ x\in[0, \theta\tfrac{r_1+r_2}{2}],\ y\in[0, r_2-r_1]\}.$$
Compare esta área com a que você obteve no item anterior. Qual é maior?

(8i) Faça um modelo de $D(1,5,\pi)$ em papel, recorte-o e monte um tronco de cone com ele, como temos feito em sala. Este tronco de cone pode ser descrito como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ usando uma notação como a dos itens 4a e 4b. Descubra como.

(8j) Faça um modelo em papel para o conjunto do item 4c, planificando cada um dos seus três pedaços (um tronco de cone e dois pedaços de cilindros). Descreva, usando a notação de conjuntos de $\mathbb{R}^2$, os três pedaços planificados que você vai recortar para preparar o modelo em papel.

Primeiro trabalho para nota

Obs: Este trabalho vale poucos pontos — 0.5 pontos, que vão ser acrescentados à nota da P1 — porque ele é a primeira parte de um trabalho maior. Neste trabalho você só vão ter que resolver os itens 8i e 8j, ~~encontrar todas as~~ e se familiarizar com o processo de calcular todos os parâmetros e coordenadas.

Na continuação deste trabalho você vai ter que explicar — de uma certa forma, que será descrita depois — como todos os parâmetros foram calculados.

Cálculo 2 - PURO/UFF
Exercícios de preparação para a VR e a VS
2010.2 - Prof: Eduardo Ochs
22/nov/2010

Convoluções

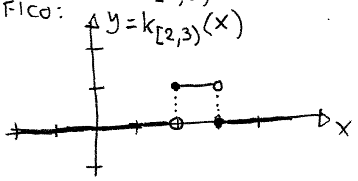
Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a convolução de f e g, que denotamos por $f\star g$, vai ser uma outra função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
A definição geral de $f\star g$ é complicada:

$$\begin{array}{rl}(f\star g): & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto \displaystyle\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt\end{array}$$

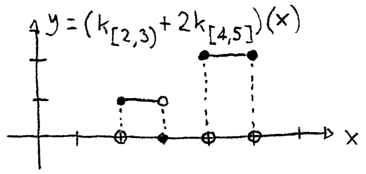
Mas nós vamos começar vendo casos particulares pra entender como isto funciona.
Mais uma definição: se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$, a função característica de A, que vamos denotar por k_A, é:

$$\begin{array}{rl}k_A: & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto \begin{cases}1 & \text{quando } x\in A, \\ 0 & \text{quando } x\notin A.\end{cases}\end{array}$$

Por exemplo, $k_{[2,3)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tem este gráfico:



Numa das primeiras listas de exercícios nós vimos como somar e multiplicar funções, e como multiplicar uma função por uma constante. Por exemplo, a função $k_{[2,3)}+2k_{[4,5]}$ tem este gráfico:



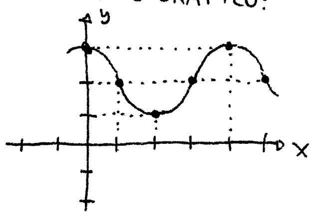
Vamos tomar, temporariamente, f como sendo $\frac{1}{2}k_{[-1,1]}$.

Com esta f eu garanto pra você que pra qualquer função g a convolução $f\star g$ pode ser calculada por este modo, que é bem mais simples:

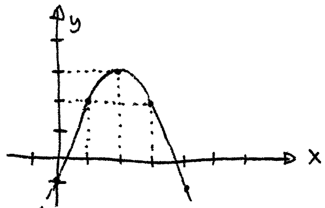
$$(f\star g)(x)=\frac{1}{2}\int_{t=x-1}^{t=x+1} g(t)\,dt.$$

CÁLCULO 2
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
6/DEZ/2010
SEGUNDA PROVA ("P2")

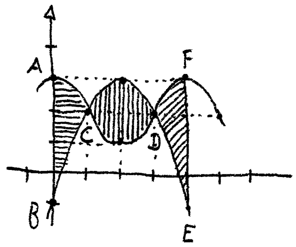
1) EXISTEM CONSTANTES $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ TAIS QUE A CURVA $y = \alpha + \beta \operatorname{sen}(\gamma + \delta x)$ TEM ESTE GRÁFICO:



E EXISTEM CONSTANTES $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ TAIS QUE A CURVA $y = \alpha + \beta x + \gamma (x - \delta)^2$ TEM ESTE GRÁFICO (OOPS, ESQUECI DE AVISAR - ESTAS CONSTANTES PODEM SER DIFERENTES DAS ANTERIORES):



~~@~~ CONSIDERE A FIGURA:



ELA É FORMADA POR TRÊS REGIÕES, QUE VAMOS CHAMAR DE ABC, CD E DEF. ~~Desenhe~~

a) ENCONTRE AS CONSTANTES CERTAS E ESCREVA AS DUAS CURVAS USANDO NOTAÇÃO DE FUNÇÃO. TESTE AS SUAS DEFINIÇÕES. ⇦ 0.5 PTS

b) DESCREVA AS REGIÕES ABC, CD E DEF - TANTO O INTERIOR DE CADA UMA QUANTO A SUA FRONTEIRA - USANDO NOTAÇÃO DE CONJUNTOS. ⇦ 1.0 PTS

c) CALCULE A ÁREA DE CADA UMA DAS TRÊS REGIÕES. ⇦ 1.0 PTS

⇧ TOTAL: 2.5

2) MOSTRE COMO ENCONTRAR AS SOLUÇÕES DA EDO ⇦ 4.0

$$f'' + f' - 6f = 0.$$

AS IDÉIAS BÁSICAS QUE VOCÊ PODE (E DEVE) USAR SÃO:

I) $Df = f'$,

II) $(D - \alpha)\beta e^{\alpha x} = 0$,

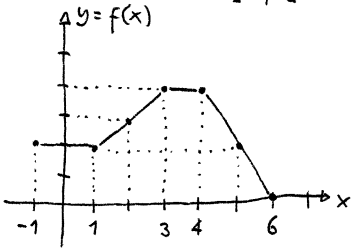
III) $(D-\alpha)(D-\beta) = D^2 - (\alpha+\beta)D + \alpha\beta$

IV) LINEARIDADE.

EXPLIQUE CADA PASSO.

<u>NESTA QUESTÃO VOCÊ NÃO PODE PERGUNTAR PRO PROFESSOR SE O SEU MODO DE EXPLICAR ALGUMA COISA ESTÁ BOM O SUFICIENTE DURANTE A PROVA</u> - VOCÊ VAI TER QUE DECIDIR O NÍVEL ADEQUADO DE DETALHE POR SI MESMO.

3) CONSIDERE A SEGUINTE FUNÇÃO, COM DOMÍNIO $[-1, 6]$: TOTAL: 4.5



a) DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA f. ⇦ 0.5

b) DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA $f|_{[1,3]}$. ⇦ 0.5

c) EXPRESSE, EM NOTAÇÃO DE CONJUNTOS: O TRAPÉZIO ENTRE O GRÁFICO DE $f|_{[1,3]}$ E O EIXO HORIZONTAL; O GRÁFICO DE $f|_{[1,3]}$; O TRONCO DE CONE GERADO PELA ROTAÇÃO DO GRÁFICO DE $f|_{[1,3]}$ EM TORNO DO EIXO $y=0$; O TRONCO DE CONE (SÓLIDO) OBTIDO PELA ROTAÇÃO DO TRAPÉZIO. ⇦ 1.0

d) CALCULE O COMPRIMENTO, A ÁREA E O VOLUME DOS CONJUNTOS DO ITEM C. ⇦ 1.0

e) EXPRESSE EM NOTAÇÃO DE CONJUNTOS A SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO E O SÓLIDO DE REVOLUÇÃO GERADOS PELA ROTAÇÃO DA CURVA f. ⇦ 0.5

f) CALCULE A ÁREA E O VOLUME DOS CONJUNTOS DO ITEM ANTERIOR. ⇦ 1.0

A PROVA SERÁ CORRIGIDA PELA TIA STEPHANIA

Cálculo 2
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
6/dez/2010
Segunda Prova ("P2") - Gabarito

(1a) A senóide é: $y=s(x)$, onde

$$\begin{aligned} s: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

E a parábola é: $y=p(x)$, onde

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 4-(x-2)^2 \end{aligned}$$

Verificação:

x	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x$	$s(x)$	$(x-2)^2$	$p(x)$
0	$\pi/2$	3	4	0
1	π	2	1	3
2	$\frac{3}{2}\pi$	1	0	4
3	2π	2	1	3
4	$\frac{5}{2}\pi$	3	4	0

(1b) Região ABC:

Interior: $\{(x,y) \mid x\in(0,1),\ y\in(p(x),s(x))\}$

Fronteira: $\{(x,y) \mid x\in[0,1],\ y\in\{p(x),s(x)\}\} \cup \{(0,y) \mid y\in[p(0),s(0)]\}$

Região CD:

Interior: $\{(x,y) \mid x\in(1,3),\ y\in(s(x),p(x))\}$

Fronteira: $\{(x,y) \mid x\in[1,3],\ y\in\{p(x),s(x)\}\}$

Região DEF:

Interior: $\{(x,y) \mid x\in(3,4),\ y\in(p(x),s(x))\}$

Fronteira: $\{(x,y) \mid x\in[3,4],\ y\in\{p(x),s(x)\}\} \cup \{(4,y) \mid y\in[p(4),s(4)]\}$

(1c)

$$\begin{aligned} P(x) &= \int p(x)\,dx \\ &= \int 4-(x-2)^2\,dx \\ &= \begin{bmatrix} x-2=u \\ x=u+2 \\ dx=du \end{bmatrix} \int 4-u^2\,du \\ &= 4u-\frac{u^3}{3} \\ &= 4(x-2)-\frac{(x-2)^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \int s(x)\,dx \\ &= \int 2+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x\right)dx \\ &= \begin{bmatrix} \pi/2+(\pi/2)x=u \\ (\pi/2)x=u-\pi/2 \\ x=(2/\pi)u-1 \\ dx=(2/\pi)du \end{bmatrix} \int (2+\operatorname{sen} u)\frac{2}{\pi}\,du \\ &= \frac{4}{\pi}\int du+\frac{2}{\pi}\int \operatorname{sen} u\,du \\ &= \frac{4}{\pi}u-\frac{2}{\pi}\cos u \\ &= 2+2x-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

x	$x-2$	$P(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x\right)$	$S(x)$
0	-2	$-8+8/3$	0	$2+0$
1	-1	$-4+1/3$	-1	$2+2+2/\pi$
2	0	0	0	$2+4$
3	1	$4-1/3$	1	$2+6-2/\pi$
4	2	$8-8/3$	0	$2+8$

$$\begin{aligned} \text{Área}_{ABC} &= \int_{x=0}^{x=1} s(x)\,dx-\int_{x=0}^{x=1} p(x)\,dx \\ &= S(1)-S(0)-P(1)+P(0) \\ &= \left(\cancel{4}+\frac{2}{\pi}\right)-2-\left(-\cancel{4}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\cancel{8}+\frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}-2-\frac{1}{3}+\frac{8}{3} \\ &= \frac{2}{\pi}+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}_{CD} &= \int_{x=1}^{x=3} p(x)\,dx-\int_{x=1}^{x=3} s(x)\,dx \\ &= P(3)-P(1)-S(3)+S(1) \\ &= \left(\cancel{4}-\frac{1}{3}\right)-\left(-\cancel{4}+\frac{1}{3}\right)-\left(\cancel{8}-\frac{2}{\pi}\right)+\left(4+\frac{2}{\pi}\right) \\ &= -\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi}+4 \\ &= \frac{4}{\pi}+\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área}_{DEF} = \text{Área}_{ABC}$$

(2) Queremos resolver

$$\begin{aligned} 0 &= f''+f'-6f \\ &= Df'+Df-6f \\ &= D(Df)+Df-6f \\ &= D^2f+Df-6If \\ &= (D^2+D-6)f \\ &= (D-3)(D+2)f \\ &= (D+2)(D-3)f. \end{aligned}$$

Sabemos que $(D+2)\beta e^{-2x}=0$
e que $(D-3)\gamma e^{3x}=0$;
portanto $(D-3)(D+2)\beta e^{-2x}=0$,
e $(D+2)(D-3)\gamma e^{3x}=0$,
e daí $(D^2+D-6)\beta e^{-2x}=0$,
$(D^2+D-6)\gamma e^{3x}=0$,
$(D^2+D-6)(\beta e^{-2x}+\gamma e^{3x})=0$,
e para quaisquer $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$
a função $f=\beta e^{-2x}+\gamma e^{3x}$
é solução da EDO $f''+f'-6f=0$.

(3a)

$$\begin{aligned} f: [-1,6] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 2 & \text{quando } x\in[-1,1], \\ x+1 & \text{quando } x\in[1,3], \\ 4 & \text{quando } x\in[3,4], \\ 12-2x & \text{quando } x\in[4,6]. \end{cases} \end{aligned}$$

(3b)

$$\begin{aligned} f|_{[1,3]}: [1,3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$

(3c) Trapézio: $\{(x,y) \mid x\in[1,3],\ y\in[0,x+1]\}$

Gráfico (segmento): $\{(x,y) \mid x\in[1,3],\ y=x+1\}$

Tronco: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x\in[1,3],\ \theta\in[0,2\pi]\right\}$

Tronco (sólido): $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x\in[1,3],\ y\in[0,x+1],\ \theta\in[0,2\pi]\right\}$

CÁLCULO 2
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
6/DEZ/2010
SEGUNDA PROVA ("P2") - GABARITO

(3d) TRAPÉZIO:

$$\text{ÁREA} = (3-1)\frac{f(1)+f(3)}{2} = 2\cdot\frac{2+4}{2} = 6$$

SEGMENTO:

$$\text{COMPRIMENTO} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$

TRONCO (NÃO-SÓLIDO):

$$\text{ÁREA} = \sqrt{8}\cdot 2\pi f(2) = \sqrt{8}\cdot 2\pi\cdot 3 = 6\pi\sqrt{8}$$

TRONCO (SÓLIDO):

$$\text{VOLUME} = \int_{x=1}^{x=3} \blacksquare\pi f(x)^2\,dx = \int_{x=1}^{x=3} \blacksquare\pi (x+1)^2\,dx = \blacksquare\pi \left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_{x=1}^{x=3} = \frac{\blacksquare\pi}{3}(64-8)$$

← OS "■"S ERAM "2"S QUE EU PUS POR DISTRAÇÃO E RISQUEI DEPOIS

(3e) SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}(x, f(x)) \;\middle|\; x\in[-1,6],\ \theta\in[0,2\pi] \right\}$$

SÓLIDO DE REVOLUÇÃO:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}(x, y) \;\middle|\; x\in[-1,6],\ y\in[0,f(x)],\ \theta\in[0,2\pi] \right\}$$

(3f) ÁREA:

$$2\cdot 2\pi\cdot 2^{\blacksquare} + \sqrt{8}\cdot 2\pi\cdot 3 + 1\cdot 2\pi\cdot 4 + \sqrt{2^2+4^2}\cdot 2\pi\cdot 2$$
$$= 2\pi(4+3\sqrt{8}+4+2\sqrt{20})$$
$$= 2\pi(8+3\sqrt{8}+2\sqrt{20})$$

VOLUME:

$$\pi\int_{x=-1}^{x=6} f(x)^2\,dx$$
$$= \pi\left(\int_{x=-1}^{x=1} 4\,dx + \int_{x=1}^{x=3}(x+1)^2\,dx + \int_{x=3}^{x=4} 16\,dx + \int_{x=4}^{x=6}(12-2x)^2\,dx\right)$$
$$= \pi\left(8 + \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{x=1}^{x=3} + 16 + \left[-\frac{(12-2x)^3}{6}\right]_{x=4}^{x=6}\right)$$
$$= 24\pi + \frac{\pi}{3}(64-8) + \pi\left(0 - \left(-\frac{4^3}{6}\right)\right)$$
$$= 24\pi + \frac{56}{3}\pi + \frac{64}{6}\pi$$

Cálculo 2
Puro/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR")
10/dez/2010

Vamos usar as seguintes notações:

$$f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

$$R_k f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x-k)$$

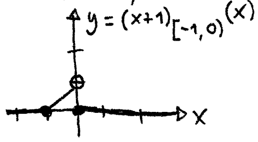
$$L_k f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x+k)$$

E além disso vamos usar expressões como "4", "x", "$3-(x-2)^2$", etc, como nomes de funções às vezes; por exemplo:

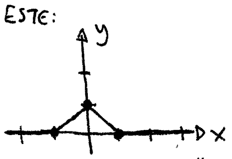
$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

$$3-(x-2)^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3-(x-2)^2$$

Podemos compôr estas notações para definir de forma compacta funções definidas por partes. Por exemplo, $(x+1)_{[-1,0)}$ tem este gráfico,

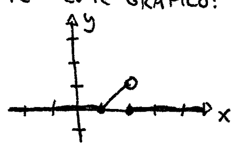


E $(x+1)_{[-1,0)}+(1-x)_{[0,1]}$ tem este:



A operação R_k "empurra o gráfico k unidades para a direita" — $R_2(x+1)_{[-1,0)}$

Tem este gráfico:



Nós vamos definir a operação de convolução desta forma:

$$(f \star g)(x) = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} (R_x f)(t) \cdot g(t)\, dt$$
$$= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t-x)\, g(t)\, dt$$

(Obs: esta definição é ligeiramente diferente da usual — ela não envolve "espelhar" uma das funções)

(1) Sejam $f = 1_{[0,1)}$ e $g = 1_{[0,1)}$. **1.0 pontos**

Calcule:
$(f \star g)(-1)$,
$(f \star g)(0)$,
$(f \star g)(1)$,
$(f \star g)(\frac{1}{2})$.

Depois "calcule" $f \star g$, isto é, encontre uma definição por casos para ela, e faça o gráfico dela.

(2) Sejam $f = 1_{[0,2)}$ e $g = 1_{[0,3)}$. **1.0 pontos**
Calcule e faça o gráfico de $f \star g$.

(3) Calcule $x_{[0,1)} \star 1_{[0,1)}$ e faça o gráfico do resultado. **2.0 pontos**

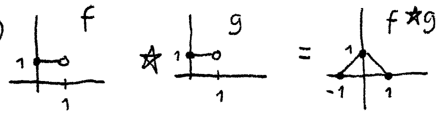
(4) Calcule $x_{[0,1)} \star x_{[0,1)}$ e faça o gráfico do resultado. **3.0 pontos**

(5) Agora sejam **4.0 pontos**
$f = 2x_{[0,1)} + 2_{[1,2)}$
e $g = 2_{[0,3)} + 4_{[3,5)}$.
Calcule $f \star g$ e faça o gráfico do resultado.

Confira as suas contas quantas vezes for preciso até você ter certeza do resultado. Nesta prova o desenvolvimento — resultados intermediários, conjeturas, etc — vai ser principalmente uma ferramenta pra te ajudar a chegar ao resultado certo, e questões com resultados errados podem ser anuladas.

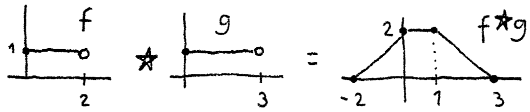
Obs: escreva as respostas claramente e indique claramente o que é rascunho e o que é resposta final! Rabiscos incompreensíveis despertarão a ira da tia Stephania!

Cálculo 2
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR") - Gabarito

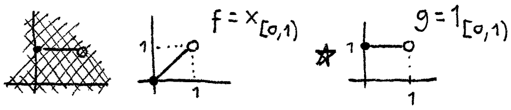
(1) 

$(f*g)(-1)=0$
$(f*g)(0)=1$
$(f*g)(1)=0$
$(f*g)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

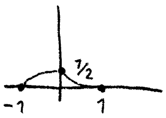
$$f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}0 & \text{quando } x\in(-\infty,-1],\\ x+1 & \text{quando } x\in[-1,0],\\ 1-x & \text{quando } x\in[0,1],\\ 0 & \text{quando } x\in[1,\infty).\end{cases}$$

(2) 

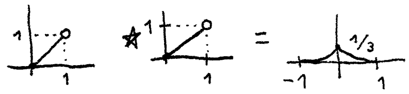
$$f*g=(x+2)_{[-2,0)}+2_{[0,1)}+(3-x)_{[1,3)}$$

(3) 

$f=x_{[0,1)}$, $g=1_{[0,1)}$

= 

$$f*g=\begin{cases}0 & \text{em } (-\infty,-1]\\ (1-x^2)/2 & \text{em } [-1,0]\\ (x-1)^2/2 & \text{em } [0,1]\\ 0 & \text{em } [1,\infty)\end{cases}$$

(4) 

$$x_{[0,1)}*x_{[0,1)}=\begin{cases}0 & \text{em } (-\infty,-1]\\ (2-x)(1+x)^2/6 & \text{em } [-1,0]\\ (x+2)(x-1)^2/6 & \text{em } [0,1]\\ 0 & \text{em } [1,\infty)\end{cases}$$

(5) Se

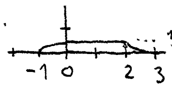
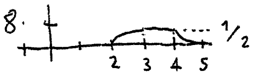
$f_1=x_{[0,1)}$, $f_2=1_{[1,2)}$,
$g_1=1_{[0,3)}$, $g_2=1_{[3,5)}$

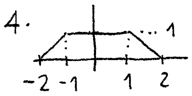
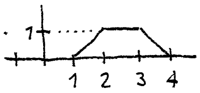
então

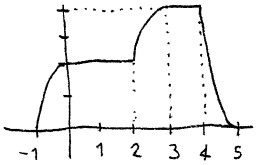
$f=2f_1+2f_2$,
$g=2g_1+4g_2$

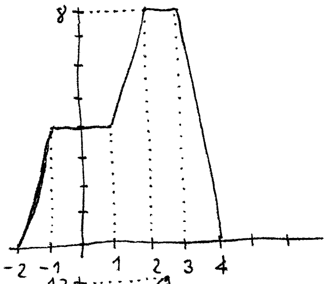
e

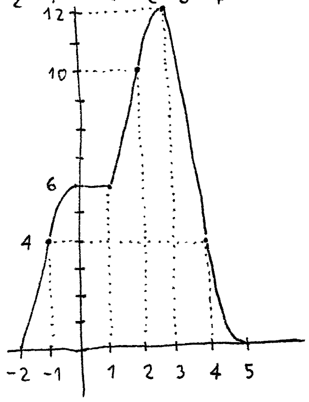
$$f*g=4(f_1*g_1)+8(f_1*g_2)+4(f_2*g_1)+8(f_2*g_2)$$

$= 4\cdot$  $+\,8\cdot$ 

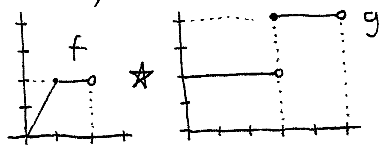
$+\,4\cdot$  $+\,8\cdot$ 

= 

+ 

= 

Ou seja,



$$f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}0 & \text{quando } x\in(-\infty,-2]\\ 4x+8 & \text{quando } x\in[-2,-1]\\ 6-2x^2 & \text{quando } x\in[-1,0]\\ 6 & \text{quando } x\in[0,1]\\ 4x+2 & \text{quando } x\in[1,2]\\ 12-2(x-3)^2 & \text{quando } x\in[2,3]\\ 36-8x & \text{quando } x\in[3,4]\\ 4(x-5)^2 & \text{quando } x\in[4,5]\\ 0 & \text{quando } x\in[5,\infty)\end{cases}$$

CÁLCULO 2
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
PROVA SUPLEMENTAR ("VS")
13/DEZ/2010

① SEJAM x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 NÚMEROS REAIS TAIS QUE $0 < x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
SEJAM f E g DUAS FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$, COM AS SEGUINTES DEFINIÇÕES:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{QUANDO } x \in (-\infty, x_0), \\ \alpha & \text{QUANDO } x \in [x_0, x_2), \\ \beta & \text{QUANDO } x \in [x_2, x_4), \\ 0 & \text{QUANDO } x \in [x_4, \infty), \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{QUANDO } x \in (-\infty, x_1), \\ \gamma & \text{QUANDO } x \in [x_1, x_3), \\ 1 & \text{QUANDO } x \in [x_3, \infty). \end{cases}$$

OBS: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ SÃO CONSTANTES.

ⓐ SUPONHA (TEMPORARIAMENTE!) QUE $(x_0, x_1, \ldots, x_4) = (1, 2, 3, 4, 5)$ E QUE $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$.
REPRESENTE GRAFICAMENTE f, g, $f+g$, fg, E DÊ DEFINIÇÕES FORMAIS, POR CASOS, PARA $f+g$ E fg. ⇐ [illegible].5 PONTOS

ⓑ DÊ DEFINIÇÕES FORMAIS, POR CASOS, PARA $f+g$ E fg NO CASO GERAL, ISTO É, QUANDO $x_0, \ldots, x_4, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ SÃO CONSTANTES QUAISQUER. ⇐ 2.0 PONTOS

ⓒ "CALCULE"
$$H(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t) + g(t)\, dt,$$
ISTO É, DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL, POR CASOS, PARA A FUNÇÃO $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ⇐ 2.0 PONTOS

<u>AVISO</u> (): NÓS VIMOS DEZENAS DE VEZES DURANTE O CURSO O QUE QUER DIZER "CALCULAR UMA INTEGRAL". VOCÊ TEM A OBRIGAÇÃO DE SABER O QUE ISTO QUER DIZER!

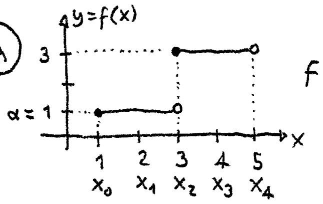
ⓓ CALCULE $\int_{t=0}^{t=x_3} H(t)\, dt$. ⇐ 2.0 PONTOS

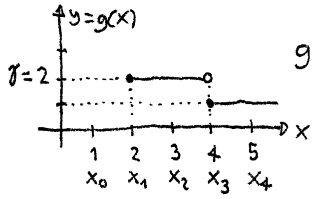
② ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA CALCULAR:
$$\int_{x=a}^{x=b} x \operatorname{sen}(kx)\, dx$$
E TESTE-A. (OBS: $k \in \mathbb{Z}$). ⇐ 2.0 PONTOS

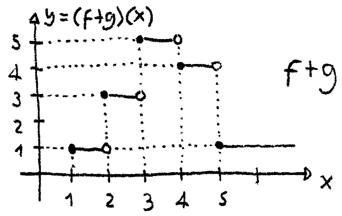
③ CALCULE:
$$\int \frac{t^2}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^5}\, dt.$$
⇐ 2.0 PONTOS

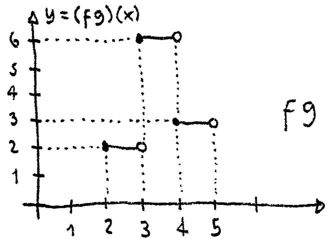
CÁLCULO 2
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
PROVA SUPLEMENTAR ("VS") - GABARITO
13/DEZ/2010

(1a)









$$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{QUANDO } x\in(-\infty,1),\\ 1 & \text{QUANDO } x\in[1,2),\\ 3 & \text{QUANDO } x\in[2,3),\\ 5 & \text{QUANDO } x\in[3,4),\\ 4 & \text{QUANDO } x\in[4,5),\\ 1 & \text{QUANDO } x\in[5,\infty),\end{cases}$$

$$fg:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{QUANDO } x\in(-\infty,2),\\ 2 & \text{QUANDO } x\in[2,3),\\ 6 & \text{QUANDO } x\in[3,4),\\ 3 & \text{QUANDO } x\in[4,5),\\ 0 & \text{QUANDO } x\in[5,\infty).\end{cases}$$

(1b) $$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{QUANDO } x\in(-\infty,x_0),\\ \alpha & \text{QUANDO } x\in[x_0,x_1),\\ \alpha+\gamma & \text{QUANDO } x\in[x_1,x_2),\\ \beta+\gamma & \text{QUANDO } x\in[x_2,x_3),\\ \beta+1 & \text{QUANDO } x\in[x_3,x_4),\\ 1 & \text{QUANDO } x\in[x_4,\infty),\end{cases}$$

$$fg:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{QUANDO } x\in(-\infty,x_1),\\ \alpha\gamma & \text{QUANDO } x\in[x_1,x_2),\\ \beta\gamma & \text{QUANDO } x\in[x_2,x_3),\\ \beta & \text{QUANDO } x\in[x_3,x_4),\\ 0 & \text{QUANDO } x\in[x_4,\infty).\end{cases}$$

(1c) $$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{QUANDO } x\in(-\infty,x_0]\\ \alpha(x-x_0) & \text{QUANDO } x\in[x_0,x_1]\\ \alpha(x_1-x_0)+(\alpha+\gamma)(x-x_1) & \text{QUANDO } x\in[x_1,x_2]\\ \left.\begin{array}{l}\alpha(x_1-x_0)+(\alpha+\gamma)(x_2-x_1)\\ \quad+(\beta+\gamma)(x-x_2)\end{array}\right\} & \text{QUANDO } x\in[x_2,x_3]\\ \begin{array}{l}\alpha(x_1-x_0)+(\alpha+\gamma)(x_2-x_1)\\ \quad+(\beta+\gamma)(x_3-x_2)\\ \quad+(\beta+1)(x-x_3)\end{array} & \text{QUANDO } x\in[x_3,x_4]\\ \begin{array}{l}\alpha(x_1-x_0)+(\alpha+\gamma)(x_2-x_1)\\ \quad+(\beta+\gamma)(x_3-x_2)\\ \quad+(\beta+1)(x_4-x_3)\\ \quad+(x-x_4)\end{array} & \text{QUANDO } x\in[x_4,\infty)\end{cases}$$

(1d)
$$\int_{t=0}^{t=x_3}H(t)\,dt=\int_{t=x_0}^{t=x_1}\alpha(t-x_0)\,dt$$
$$+\int_{t=x_1}^{t=x_2}\alpha(x_1-x_0)+(\alpha+\gamma)(t-x_1)\,dt$$
$$+\int_{t=x_2}^{t=x_3}\alpha(x_1-x_0)+(\alpha+\gamma)(x_2-x_1)+(\beta+\gamma)(t-x_2)\,dt$$
$$=\alpha\frac{t^2}{2}\Big|_{t=x_0}^{t=x_1}-\alpha x_0(x_1-x_0)$$
$$+\alpha(x_1-x_0)(x_2-x_1)+(\alpha+\gamma)\frac{t^2}{2}\Big|_{t=x_1}^{t=x_2}-(\alpha+\gamma)x_1(x_2-x_1)$$
$$+\alpha(x_1-x_0)(x_3-x_2)+(\alpha+\gamma)(x_2-x_1)(x_3-x_2)$$
$$+(\beta+\gamma)\frac{t^2}{2}\Big|_{t=x_2}^{t=x_3}-(\beta+\gamma)x_2(x_3-x_2)$$

(2)
$$\int \operatorname{sen} kx\,dx=-\frac{1}{k}\cos kx$$
$$\int xf'(x)\,dx=xf(x)-\int f(x)\,dx$$
$$\int x\operatorname{sen} kx\,dx=x\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)-\int\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)dx$$
$$=-\frac{x}{k}\cos kx+\frac{1}{k}\int\cos kx\,dx$$
$$=-\frac{x}{k}\cos kx+\frac{1}{k^2}\operatorname{sen} kx$$
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{k}\cos kx+\frac{1}{k^2}\operatorname{sen} kx\right)=\left(-\frac{1}{k}\cos kx-\frac{x}{k}(-k\operatorname{sen} kx)\right)$$
$$+\frac{1}{k^2}(k\cos kx)$$
$$=x\operatorname{sen} kx$$

(3)
$$\int\frac{t^2}{(\sqrt{1+t^2})^5}\,dt=\left[\begin{array}{l}t=\tan\theta\\ dt=\sec^2\theta\,d\theta\\ \sqrt{1+t^2}=\sec\theta\\ \arctan t=\theta\end{array}\right]\int\frac{\tan^2\theta}{\sec^5\theta}\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int\tan^2\theta\,\sec^{-3}\theta\,d\theta$$
$$=\int\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^3\theta\,d\theta$$
$$=\int\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$=\left[\begin{array}{l}\operatorname{sen}\theta=s\\ \cos\theta\,d\theta=ds\end{array}\right]\int s^2\,ds$$
$$=\frac{s^3}{3}=\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}=\frac{\operatorname{sen}^3(\arctan t)}{3}$$