Quick index
main
eev
maths
blogme
dednat4
littlelangs
PURO
(MD, GA)
(Chapa 1)
emacs
lua
(la)tex
fvwm
tcl
forth
icon
debian
politics
personal
heroes
irc
contact
☿

Geometria Analítica - 2011.2

```
Horários do curso em 2011.2: 4ªs e 6ªs 11-13, sala 19.
Página do curso de 2011.1:
  http://angg.twu.net/2011.1-GA.html
            (find-TH "2011.1-GA")
Arquivo com todas as folhas manuscritas do curso de 2011.1:
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.pdf
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.djvu
Vamos usar principalmente este livro (o do CEDERJ):
  http://www.professores.uff.br/jorge_delgado/
  http://www.professores.uff.br/jorge_delgado/livros/ga-vol1.pdf
(Pôr links para: ementa e programa; regras; página do reginaldo)
  http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf


Versão para impressão:
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.2.pdf
(Pode estar desatualizada!)
```

O monitor é o Marcos Vinicius <marcos.linak@gmail.com>. Os horários de atendimento dele são: 2ªs 16-18 na sala 6A, 4ªs 18-22 na sala 14, 6ªs 16-18 na sala 5A.

```
Plano de aulas / resumo do que já aconteceu:

1ª aula (10/ago):
  Geometria Analítica é principalmente sobre _subconjuntos_ de R^2 -
  (retas, círculos, etc) e de R^3 (planos, etc). A primeira coisa que
  a gente tem que aprender é a descrever estes conjuntos formalmente
  muito bem, de modo que todo mundo entenda.
  Notações:
    {2, 3, 4}                   (subconjunto explícito, finito, de R)
    {2, 3, ..., 10}             (aqui o "..." é claro o suficiente)
    {x∈{2, 3, 4, 5} | x é par}  (note a ordem: gerador, filtros)
    {x^2 | x∈{1, 2, 3}}         (outra ordem! Isto dá {1^2, 2^2, 3^2})
    [1, 2]                      (intervalo fechado)
    (1, 2)                      (intervalo aberto)
    [1, 2)                      (intervalos abertos de um lado
    (1, 2]                       e fechados do outro)
  Repare que a notação para intervalo aberto é a mesma que pra par
  ordenado - a gente deduz pelo contexto se "(a,b)" quer dizer um par
  ordenado ou um intervalo aberto.
  Passamos a aula toda trabalhando em cima de exercícios. No primeiro
  bloco de exercícios eu dei representações gráficas destes conjuntos
  e pedi pros alunos encontrarem representações "em matematiquês"
  deles:
    A = [-1,0]∪[1,2]
    B = [-2,-1]∪{0,2}∪(4,+∞)
    C = {(1,1), (2,2), (3,3)}
    D = {(x,2)| x∈R}
    E = {(k,2)| k∈Z}
    F = {(x,y)∈R^2 | x=y}
  E o segundo bloco de exercícios era de "represente graficamente":
    A' = [3,4]∪(6,7)
    B' = [3,5]∪(4,6)∪{0,1}
    C' = {(1,2),(1,3),(3,3)}
    D' = {x∈{0,...,5} | 0<=x<=3 e 2<=x<=5}
    E' = {x∈{0,...,5} | 0<=x<=3 ou 2<=x<=5}
    F' = {(x,1) | x∈{0,1,2,3}}
    G' = {(x,y)∈R^2 | x∈{1,2}, y∈{2,3}}
    H' = {(x,y)∈R^2 | x+y=0}
```

```
    I' = {(x,y)∈R^2 | x∈{-2,-1,...,2}, y=x^2}
    J' = {(x,y)∈R^2 | x∈[-2,2], y=x^2}
    K' = {(x,y)∈R^2 | x∈R, y=x^2}
    L' = {-2,-1,...,2}^2
    M' = {(x,y)∈{-2,-1,...,2}^2 | x^2+y^2=4 }
    N' = {(x,y)∈Z^2 | x^2+y^2=25 }
    O' = {(x,y)∈R^2 | x^2+y^2=25 }
    P' = {(x,y)∈R^2 | x∈[1,3], y∈[2,3]}
  Ainda não corrigimos as soluções que os alunos encontraram.
2ª aula (12/ago):
  Revimos os dois modos de construir conjuntos usando {...|...} e
  geradores e filtros.
  Pedi pros alunos terminarem os exercícios da aula passada e
  representarem graficamente mais estes:
    A'' = {(t,2t) | t∈{1,2,3}}
    B'' = {(1,2) + (t,2t) | t∈{0,1,2}}
    C'' = {(1,2) + (t,2t) | t∈R}
    D'' = {(1,2) + (-u/2, -u) | u∈R}
    A''' = {(t,2t) | t∈{1, 1.5, 2, 2.5, 3}}
    A'''' = {(t,2t) | t∈{1, 1.1, 1.2, ..., 3}}
    A''''' = {(t,2t) | t∈[1, 3]}
  e pedi pra eles encontrarem representações em "matematiquês formal"
  (em notação de conjuntos) para os conjuntos abaixo (eu desenhei no
  quadro a representação gráfica deles):
    B''' = {(t,2) | t∈[-1,2]}
    C''' = {(x,y)∈R^2 | x+y=2}
    D''' = {(x,y)∈R^2 | x=1, y∈[2,4]} ∪ {(x,y)∈R^2 | x=1, y∈[2,4]}
  Pus o seguinte aviso no quadro (com caveirinha): vocês vão passar o
  curso inteiro tendo que traduzir entre representações formais de
  conjuntos e representações gráficas, então comecem a treinar!!!
  Depois distribuí cópias de metade desta folha:
    *** pôr um link pro scan aqui ***
  para uma metade da turma e cópias da outra metade da folha pra outra
  metade da turma, e pedi pra cada pessoa representar "em
  matematiquês" os conjuntos que recebeu, e dar pra alguma pessoa da
  outra metade da turma essas representações em matematiquês; essa
  pessoa tentaria representar graficamente o que recebeu, e aí
  as duas comparariam essa representação gráfica com a original.

3ª aula (17/ago): aula cancelada (licença-luto)
4ª aula (19/ago): idem

5ª aula (24/ago): segmentos e retas diagonais, semiplanos.
  Sejam:
    A = (1,3),
    B = (4,1),
    r_1 = {(1,3) + t(3,-2) | t∈R}
    r_2 = {(x,y)∈R^2 | y = 11/3 - (2/3)*x}
    r_3 = {(x,y)∈R^2 | (2/3)*x + y = 11/3}
    r_4 = {(x,y)∈R^2 | (2/3)*x + y - 11/3 = 0}
    s_1 = {(1,3) + t(3,-2) | t∈[0,1)}
    s_2 = {(1,3) + u(3/2,-1) | u∈[0,2)}
    s_3 = {(4,1) + w(-3,2) | w∈(0,1]}
    s_4 = {(0,11/3) + x(1,-2/3) | x∈[1,4)}
    s_5 = {(x,y)∈R^2 | ∃t∈[0,1).((1,3)+t(3,-2) = (x,y))}
    z(x,y) = (2/3)*x + y - 11/3
    r_5 = {(x,y)∈R^2 | z(x,y) = 0}
    C_1 = {(x,y)∈R^2 | z(x,y) >= 0}
    (]]])
6ª aula (26/ago):
    (Vimos como fazer "mudanças de variável" nos segmentos e retas da
    aula anterior e como mudar entre várias representações de uma
    reta; passei um problema envolvendo três semiplanos; nos últimos
    15 minutos da aula fizemos esta atividade aqui:)
      (find-TH "2011-4perguntas")
```

```
7ª aula (31/ago): Pra fazer os alunos começarem a se familiarizar com
  objetos matemáticos como "o conjunto de todas as retas", nós
  passamos a aula resolvendo os problemas abaixo:
  (1) Seja H = {{(x,y) | x∈{0,1}} | y∈{0,1}}.
      Calcule H e represente graficamente os elementos de H.
  (2) Seja H = {{(x,y) | x∈{0,1,2}} | y∈{0,1,2}}.
      Represente graficamente os elementos de H.
  (3) Para a,b∈R, seja r_(a,b) = {(x,y}∈R^2 | y=ax+b}.
      (a) Represente graficamente r_(0,1).
      (b) Idem para r_(0,2).
      (c) Idem para r_(1,1).
  (4) (Pra quem teve dificuldade na (1)):
      Seja C_y = {(x,y) | x∈{0,1}}.
      (a) Calcule C_0 e C_1.
      (b) Calcule {C_y | y∈{0,1}}.
  (5) Seja \calR = {r_(a,b) | a,b∈R}.
      Existe um elemento C∈R tal que (0,0)∈C e (2,2)∈C.
      Que elemento é este?
  (6) Para a,b,c∈R, seja s_(a,b,c) = {(x,y)∈R^2 | ax+by=c}.
      Seja \calS = {s_(a,b,c) | a,b,c∈R}.
      (a) Todos os elementos de \calS são retas?
      (b) Todas as retas de \calS pertencem a \calR?
      (c) Existem (a,b,c),(a',b',c')∈R^3, diferentes,
          tais que s_(a,b,c) = s_(a',b',c')?
      (d) (Pra quem estiver com dificuldade nas anteriores):
          represente graficamente s_(0,1,2) e s_(2,1,0).
8ª aula (02/set): Definições:
    r_(a,b)   = {(x,y)∈R^2 | y=ax+b}
    s_(a,b,c) = {(x,y)∈R^2 | ax+by=c}
    \calR     = {r_(a,b)   | a,b∈R}
    \calS     = {s_(a,b,c) | a,b,c∈R}
  Trabalhamos sobre estes problemas:
    (a) Todo elemento de \calR pertence a \calS?
    (b) Todo elemento de \calS pertence a \calR?
    (c) Todo elemento de \calS é uma reta?
    (d) r_(1,2) in \calS? Porque?
    (e) s_(2,1,0) in \calR? Porque?
  Pra casa: tente responder os problemas acima seguindo as regras:
    http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf

9ª aula (07/set): feriado.
10ª aula (09/set): Voltamos aos problemas da aula passada, mas um
  pouco simplificados:
    (a') Mostre que     todo elemento de \calR pertence a \calS.
    (b') Mostre que nem todo elemento de \calS pertence a \calR.
  Os problemas das listas do Reginaldo vão ser parecidos com estes, só
  que bem piores... quase todos vão usar vetores. Links pras listas do
  Reginaldo:
    http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista2_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista3_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista4_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista5_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista6_1_2011.pdf
    http://angg.twu.net/GA/lista7_1_2011.pdf
  Dá pra representar _segmentos direcionados_ em "matematiquês formal"
  como pares de pontos. Por exemplo, se A=(2,1) e B=(1,3) então o
  segmento direcionado indo de A para B vai ser representado como
  (A,B) = ((2,1),(1,3)). E podemos representar _vetores_ em
  matematiquês formal como conjuntos de segmentos direcionados:
    ---->
    (a,b) = {((x,y),(x+a,y+b)) | (x,y)∈R^2}
  (Obs: o livro do CEDERJ não faz estas definições de modo tão
  explícito).
```

Uma solução pro (a'), seguindo todas as regras em
 http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf
é: todo elemento de \calR é da forma r_(a,b), para algum a∈R e algum b∈R (obs: "é da forma" é um jargão matemático; discutimos ele um bocado). E para quaisquer a,b∈R temos: r_(a,b) = ... = s_(-a,1,b) ∈ \calS.

[Discutimos como fazer substituição; fiquei devendo explicar as regras pra vetores...]

((2,1),(1,3)) ∈ AB?
((0,0),(-1,2)) ∈ AB?
((0,0),(1,1)) ∈ AB?
((1,3),(2,1)) ∈ AB?

*** fiquei devendo uma folha de explicações sobre substituição ***

11ª aula (14/set): Discutimos algumas questões da lista do Reginaldo que eram falsas (e pra mostrar que elas eram falsas bastava encontrar um contra-exemplo) e uma questão que era verdadeira (a do quadrilátero ABCD). Lembrei pra todo mundo as definições de produto interno e norma, e pedi pra todo mundo tentar provar que:

Se u,v são vetores então ||u||v e ||v||u são vetores de mesmo comprimento.

Pedi pras pessoas testarem o caso u=(0,2) e v=(3,4) - aí ||u||v=(6,8) e ||v||u=(0,10), que têm o mesmo comprimento. Avisei que as contas podiam ficar complicadas, e que era pra todo mundo tentar fazer em casa.

12ª aula (16/set): como preparação pro problema do
|| ||u||v || = || ||v||u ||
fizemos vários exercícios de V/F/justifique:

a) ( ) Se a∈R então a=sqrt(a^2)
b) ( ) Se a,b∈R então sqrt(a+b) = sqrt(a)+sqrt(b)
c) ( ) Se a,b∈R então sqrt(a^2+b^2) = sqrt(a^2)+sqrt(b^2)
d) ( ) Se a,b∈R então sqrt(ab) = sqrt(a)sqrt(b)
e) ( ) Existem a,b∈R tais que sqrt(a+b) = sqrt(a)+sqrt(b)
f) ( ) Se a∈R e v é vetor, ||av||= a||v||
g) ( ) Existem a,b,x,y∈R tais que ||(a,b)||(x,y) = (ax+bx,ay+by)
h) ( ) Se a∈R e u,v são vetores então (au)·v = a(u·v) = u·(av)
i) ( ) Se u,v são vetores então u·v = v·u

Na aula que vem os últimos 30 minutos vão ser pra vocês resolverem duas questões da 1ª lista do Reginaldo e me entregarem - a notação tem que estar certa, tem que seguir todas as regras, etc. ISTO VAI VALER 1 PONTO EXTRA PRA P1.

Dica: tentem mostrar EM CASA que ||u||v e ||v||u são vetores de mesmo comprimento de forma que as contas fiquem bem curtas. É DIFÍCIL ESCREVER ISTO DIREITO!

Links:
 http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
 http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf

13ª aula (21/set): Discutimos exercícios da lista do Reginaldo; o teste que seria hoje foi transferido pra 6ª - principalmente porque a maior parte da turma estava enrolada com os problemas que envolviam resolver sistemas - por exemplo o antepenúltimo da 1ª folha daqui:
 http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
Escolhendo vetores mais simples pra facilitar as contas, ele vira:
 ( ) Todo ponto do plano é combinação linear de u=(1,1) e v=(-1,1)
isto é equivalente a:
 ( ) Todo ponto do plano é da forma au+bv, para a,b∈R e u=(1,1) e v=(-1,1)
que é equivalente a:
 ( ) Para todo (x,y)∈R^2 existem a,b∈R tais que (x,y)=au+bv, onde u=(1,1) e v=(-1,1)
Dica MUITO importante: o melhor modo de provar que existem a,b∈R obedecendo uma certa condição é "encontrar explicitamente" um a e um b obedecendo a condição... por exemplo, neste problema, escrevendo

um programa que recebe x e y e calcula a e b.
Introduzi a idéia de projeção: Pr_v w, a "projeção sobre v de w", é o vetor da forma av tal que o ponto O+av seja o mais próximo possível de O+w.
No fim da aula passei um problema pra casa, avisando que ele é trabalhoso, mas que quem tentar fazê-lo vai aprender MUITO: sejam v=(1,2) e w=(-1,1); encontre a∈R tal que O+av seja o mais próximo possível de O+w.
O teste foi transferido para a aula seguinte.

14ª aula (23/set): usando a definição de Pr_v w,
Def: Pr_v w é o vetor da forma av tal que o ponto O+av
seja o mais próximo possível do ponto O+w
nós fizemos as contas para o caso v=(v_1,v_2) e w=(w_1,w_2), e encontramos uma função de a que deveria ser minimizada; no caso que tinha sido deixado pra casa na última aula, v=(1,2) e w=(-1,1),

```
  f(a) = ||av-w||^2
       = (av-w)·(av-w)
       = a^2 v·v - 2a v·w + w·w
       = 5 a^2   - 2a     + 2
```

Queremos f'(a)=0, o que acontece em a=1/5, e aí

```
  Pr_v w = Pr_(1,2) (-1,1)
         = 1/5 (1,2)
         = (1/5, 2/5).
```

Passei três exercícios de "V, F, justifique":

( ) Se v _|_ w então ||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2
( ) Se v _|_ w então Pr_v w = 0
( ) Se w = u+av e u _|_ v então Pr_v w = av

E um problema, com o aviso de que ele é importante, interessante, etc: Usando a definição de Pr_v w encontre uma fórmula para Pr_v w e explique a sua derivação desta fórmula seguindo todas as "regras".
Fizemos o teste valendo 1 ponto extra na P1:

( ) Todo vetor do plano é combinação linear dos vetores v=(2,3) e w=(-4,5).
( ) Se u,v,w são vetores, u != (0,0) e u·v=u·w então v=w.

Diga se as duas afirmacoes acima são verdadeiras ou falsas e justifique. SIGA TODAS AS REGRAS.

15ª aula (28/set): Como muita gente fez contas erradas na prova e quase ninguém conferiu as contas eu resolvi dar uma aula sobre obter aproximações para valores...

(1) Sejam v=(4,-1), w=(1,2), u=(-1,2). Encontre valores para a,b∈R tais que av+bw seja _aproximadamente_ u. Faça isso graficamente, sem contas!
(2) Sejam v=(1,2) e w=(0,4). Encontre uma aproximação para Pr_v w (também graficamente, sem contas).
(3) Sejam v=(3,2) e w=(1,1). Encontre uma aproximação para Pr_v w (idem).
(4) A reta r_ab = {(x,y)∈R^2 | x/a + y/b = 1} passa por exatamente um ponto da forma (alfa,0) e por exatamente um ponto da forma (0,beta). Quais são eles? Resolva esta parte algebricamente, e o resto graficamente...
Sejam A=(1,1), B=(3,2), e r a reta que passa por A e B. Seja s uma reta perpendicular a r que passa pelo ponto A. Encontre, _sem fazer as contas_, uma reta da forma r_ab que seja parecida com a reta s que você desenhou.

16ª aula (30/set): comecei com este exercício:

```
  Sejam C = {(x,y)∈R^2 | x^2+y^2=4},
        r = {(0,y) | y∈R},
        s = {(1,1) + t(-1,2) | t∈R}.
```

Encontre (graficamente) C∩r e C∩s.
Dê aproximações para as coordenadas dos pontos
se não for fácil calculá-los explicitamente.
Dica: comece encontrando 4 pontos de C e 2 pontos de s.
Obtivemos:

```
  A = (A_1, A_2) ~ (0.9, 1.9)
```

```
    B = (B_1, B_2) ~ (1.9, -0.9)
    C = {A, B}.
  Com isto podemos fazer um desenho com C, s, A e B!
  Repare que se dizemos simplesmente "seja A um ponto que pertence a C
  e a s" temos uma ambiguidade - temos duas escolhas possíveis para A!
  Vetores vão nos ajudar a nos livrar de algumas destas ambiguidades.
  Podemos resolver o problema 4 da aula passada desta forma:
    Sejam A = (1,1),
          B = (3,2),
          v = AB = (2,1),
          r = {A + tv | t∈R},
          w = (1,-2) um vetor perpendicular a v,
          s = {a + tw | t∈R}.
  Outro problema da aula passada:
  *** transcrever depois ***
    (find-QUADROfile "" "2011-09-30-GA")
    (find-QUADRO        "2011-09-30-GA-1.jpg")
    (find-QUADRO        "2011-09-30-GA-2.jpg")

17ª aula (05/out): Algumas construções de aulas de geometria de ensino
  médio (<- que todo mundo deveria ter tido, mas sabe como é).
    Sejam A=(0,0), B=(0,2), C=(4,4).
    1) Sejam A' o ponto médio de BC,
             B' o ponto médio de AC,
             C' o ponto médio de AB.
       Encontre o ponto de interseção das retas AA', BB', CC'.
       (Faça o desenho e encontre ele aproximadamente, no olhômetro).
    2) Seja m_AB a _mediatriz_ do segmento AB - ou seja, a reta
       perpendicular a AB que passa pelo ponto médio de AB -, m_AC a
       mediatriz de AC, m_BC a mediatriz de BC.
       Encontre o ponto de interseção das retas m_AB, m_AC, m_BC.
    3) Seja CC_H a _altura_ do lado AB do triângulo ABC; C_H é o ponto
       de interseção entre a reta AB e a reta perpendicular a AB que
       passa por C.
       Encontre o ponto de interseção de AA_H, BB_H, CC_H.
  Resolvemos o (1) em sala; como os alunos não lembravam de
  coeficiente angular e coeficiente linear fizemos uma revisão. Aí
  encontramos as equações das retas AA', BB', CC', o ponto de
  interseção de AA' e BB' (exato, algebricamente) e verificamos que
  ele pertencia a CC'. Obs: como o enunciado dizia "encontre _o_ ponto
  de interseção" estava implícito que as três retas se encontram num
  único ponto - não é óbvio que as três se encontramos num ponto só,
  tivemos que conferir.
    4) Sejam A=(0,0), B=(0,3), C=(4,3).
       Neste caso, pras contas não ficarem difíceis demais, o ângulo
       ABC é reto (90°).
       A _bissetriz_ do ângulo ABC de um triângulo é a reta que passa
       por B e que "divide o ângulo ABC ao meio".
       Seja B'' a interseção da bissetriz de ABC com a reta AC.
       Seja A'' a interseção da bissetriz de BAC com a reta BC.
       Seja C'' a interseção da bissetriz de ACB com a reta AC.
       4a) Calcule, no olhômetro, aproximações para A'', B'' e C'', e
           confira com as dos seus colegas.
       4b) Calcule, no olhômetro, uma aproximação para o ponto de
           interseção das retas AA'', BB'' e CC''.
       4c) Calcule exatamente A'', B'', C'' e o ponto de interseção de
           AA'', BB'' e CC''.
  No ensino médio a gente poderia encontrar essas bissetrizes usando
  compasso... por exemplo, traçamos um círculo de centro A e raio 2, e
  chamamos de A_B e A_C os pontos de interseção deste círculo com os
  lados AB e AC; traçando outros círculos de raio 2 com centros A_B e
  A_C encontramos um ponto auxiliar, A''', tal que os pontos A, A_B,
  A''', A_C formam um losango; prolongando a diagonal desse losango,
  AA''', obtemos a bissetriz do ângulo BAC.
    Em GA dá trabalho usar círculos mas podemos obter estes losangos
```

de outros modos. Pedi pros alunos calcularem e desenharem os vetores
AB, AC, AB/||AB||, AC/||AC||, e pra calcularem em casa o ponto A''',
a reta AA''' e o ponto A'', pra fazerem o mesmo para os outros dois
ângulos, e pra encontrarem o ponto de interseção das três
bissetrizes.
  *** Este problema (o 4c) é importante e as contas são mais ou
  menos grandes - vocês vão levar pelo menos uns 20 minutos. Não
  deixem de fazê-lo em casa! ***

18ª aula (07/out): propriedades do produto interno (e seus porquês).
Digamos que A=(x,y) e v=(x,y)=OA.
A norma de v, pela nossa definição algébrica de norma, é uma conta:
||v|| = sqrt(v·v) = sqrt(x^2+y^2).
  Primeira propriedade nada óbvia do produto interno: a norma de
||OA|| é o comprimento do segmento OA - ou seja, o comprimento de OA
pode ser calculado pela fórmula sqrt(x^2+y^2). Isto é o Teorema de
Pitágoras, e todo mundo tem que ver alguma demonstração dele pelo
menos uma vez na vida.
Fizemos esta figura:

```
     B--B'------C
     |  |       |
     |  B''--C''C'
     |  |    |  |
     |  |    |  |
  +--A'-A''--D''|
  |  |       |  |
  +--A-------D'-D
     |       |
     |       |
     |       |
     |       |
     +-------+
```

com diagonais A'B', B'C', C'D', D'A', que não dá pra desenhar em
ascii. Supusemos que A=(0,0), D'=(alfa,0), A'(0,beta),
C=(alfa+beta,alfa+beta), etc, e pedi pros alunos calcularem as
coordenadas de todos os pontos.
  Sabemos calcular a área de um retângulo qualquer em R^2 que tenha
dois lados horizontais e dois verticais (base·altura) e a área de um
triângulo retângulo qualquer de R^2 que tenha um lado horizontal e
um vertical (base·altura/2).
  Aí calculamos a área do quadradão, Area(ABCD), do quadradinho,
Area(A''B''C''D''), dos 8 triângulos retângulos, e a área do
quadrado inclinado, Area(A'B'C'D') (de pelo menos três modos).
  PRA CASA: escrever direito a demonstração de que Area(A'B'C'D')
= alfa^2 + beta^2 (e que portanto A'D' = sqrt(alfa^2 + beta^2)).
  A segunda propriedade nada óbvia do produto interno é a "regra do
cosseno". A versão complicada dela é a seguinte: se v=(v_1,v_2)=OA
w=(w_1,w_2)=OB, então v·w = ||v||·||w||·cos θ, onde θ é o ângulo
entre OA e OB. A versão simples é a seguinte: se v=(v_1,v_2)=OA,
w=(w_1,w_2)=OB, e além disto ||v||=||w||=1, então v·w = cos θ, onde
θ é o ângulo entre OA e OB. Vamos provar a versão simples.
  Pra fazer uma figura com coordenadas explícitas usamos A=(3/5,4/5)
e B=(4/5,3/5). Aí: seja r uma reta perpendicular a OB que passa pelo
ponto A; seja C o ponto de interseção das retas r e OB.
  PRA CASA: calcule as coordenadas de C (fizemos só o início das
contas em sala).
  PRA CASA: mostre como calcular as coordenadas de C no caso
geral, em que v_1, v_2, w_1, w_2 são reais quaisquer com
v_1^2+v_2^2=1 e w_1^2+w_2^2=1.
  Vimos que OAC é um triângulo retângulo com hipotenusa OA, e
||OA||=1. Então, pela definição de coseno, cos θ = ||OC||.
  PRA CASA: calcule ||OC|| no caso geral (com ||v||=||w||=1) e
verifique que ||OC|| = v_1·w_1 + v_2·w_2.

19ª aula (12/out): feriado (dia das crianças e dia nacional da luta
contra a corrupção).

20ª aula (14/out):
    (1) Seja v=(2,1), e
        seja A={O+w | v·w=1}.
        Represente graficamente A.
        Dica: comece calculando v·(x,y) para cada x,y∈Z - ou, mais
        realisticamente, para cada x,y∈{-3,-2,-1,0,1,2,3} - e
        represente os seus resultados graficamente.
    (2) Seja w=av, v=(2,1). Encontre o a que faz com que v·w=1.
    (3) Seja u=(1,-2). Mostre que para quaisquer a e w temos
        v·w=v·(aw+u).
    (4) Mostre que A != {(-1,3),(0,1),(1,-1),(2,-3)}.
  Uma idéia importante: "lugar geométrico" - em A={O+w | v·w=1} o
  conjunto A é o "lugar geométrico" dos pontos O+w tais que v·w=1. Ou
  seja, "lugar geométrico" é uma terminologia antiga para "o conjunto
  dos pontos tais que".
    (find-QUADROfile "" "2011-10-14-GA-1.jpg")
    (find-QUADRO   "2011-10-14-GA-1.jpg")
    (find-QUADRO   "2011-10-14-GA-2.jpg")
    (find-QUADRO   "2011-10-14-GA-3.jpg")
    (find-QUADRO   "2011-10-14-GA-4.jpg")
    (find-QUADRO   "2011-10-14-GA-5.jpg")
    [[falta completar]]

21ª aula (19/out): semana acadêmica
22ª aula (21/out): semana acadêmica

23ª aula (26/out): revisão pra P1.
  Trabalhamos em cima destes problemas:
  (1) Sejam A, B, C três pontos do plano. Encontre um ponto D
      equidistante de A, B, C.
      [[Exemplo: se A=(1,1), B=(1,5), C=(3,2) então D=(2,3) _não é_
         equidistante de A, B, e C.]]
  (2) Seja M o ponto médio de A e B e seja w um vetor ortogonal a AB.
      Mostre que os pontos da reta r = {M+tw | t∈R} são todos
      equidistantes de A e B.
  (3) (Truque pra 2) Sejam v, w dois vetores ortogonais.
      Mostre que ||av+bw||^2 = ||av||^2 + ||bw||^2.
  (4) Sejam A, B, M, w, r como no problema 2. Sejam v=AB e P=M+bw
      (aqui b é um real qualquer - lembre que A e B são pontos
      quaisquer e w é um vetor ortogonal a AB qualquer).
      Expresse AP e BP como combinação linear de v e w.
24ª aula (28/out): *Novidade*: 28/out é dia do funcionário público, e
  portanto feriado: <http://www.prograd.uff.br/novo/calendarios>...
  A P1 foi remarcada pra depois!

25ª aula (02/nov): feriado - finados
  http://www.prograd.uff.br/novo/calendarios
26ª aula (04/nov): Revisão pra P1. Avisei que pra prova todo mundo vai
  ter que ser capaz de resolver problemas como os da aula de hoje
  CLARAMENTE e COM TODOS OS DETALHES.
  (1) Seja r uma reta qualquer que não é nem horizontal nem vertical.
      Seja s uma reta ortogonal a r (<- obs: aqui fica implícito que s
      é _qualquer_ reta ortogonal a r). Sejam alfa o coeficiente
      angular de r e beta o coeficiente angular de s. Qual é a relação
      entre alfa e beta?
      (Resolva isto escrevendo r como conjunto, construindo uma reta s
      - expresse-a como conjunto também! - e obtendo alfa e beta. Note
      que aqui não basta usar um caso particular com coordenadas e
      coeficientes numéricos!)
  (2) Sejam r e r' retas com coeficiente angular alfa que passam pelos
      pontos (a,0) e (a',0) respectivamente. Seja s uma reta com
      coeficiente angular beta, e digamos que s corta r e r' nos
      pontos C e C' respectivamente. Descubra a distância entre C e
      C'.
  Discutimos um bocado o (1), mas depois os alunos saíram pra fazer

prova de Cálculo e deixaram pra fazer o (2) em casa.
Uma dica: **me mandem dúvidas por e-mail!** Algumas pessoas estão
pedindo mais exercícios, mas muitos bons exercícios são inspirados
por dúvidas...

27ª aula (09/nov): P1. Matéria (vou completar depois!):
Notação de conjuntos (veja a 1ª aula, acima)
Retas e segmentos como subconjuntos do plano (2ª e 5ª aulas)
Afirmações gerais dos tipos "todo ponto (ou reta, ou segmento, ou
círculo, etc) tem a propriedade tal" e "existe um ponto/reta/etc
com a propriedade tal" e como provar que elas são verdadeiras ou
falsas (veja a 8ª e a 10ª aulas e as listas do Reginaldo)
Interseção de retas (resolução exata, por sistemas de equações)
Operações com vetores: soma, produto por escalar, produto interno,
norma, normalização (v/||v||), projeção de um vetor sobre outro
Vetores paralelos a retas e ortogonais a retas
Coeficiente angular e coeficiente linear (em {(x,y)∈R^2 | y=ax+b})
Construções geométricas e descrições destas construções em
"português formalizável"
Representação gráfica de construções geométricas (nomeando pontos,
coordenadas, retas, vetores) tanto no caso em que os dados
originais são dados "explicitamente" (como números) quanto no caso
em que as coordenadas são expressas "simbolicamente" (como
variáveis)
Lembre das "regras":
http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf
*** As questões e o gabarito estão aqui: ***
http://angg.twu.net/GA/GA_P1_2011nov09.pdf
http://angg.twu.net/GA/GA_P1_2011nov09.djvu
28ª aula (11/nov):
(1) Digamos que o triângulo ABC tem vértices A=(0,0) e C=(3,0), e
(comprimentos dos) lados AC=3, AB=\sqrt(5), BC=\sqrt(8).
Encontre as coordenadas do ponto B. Obs: a sua resposta vai ter
um "ou", porque há duas possibilidades... dica: uma delas é
B=(1,2).
Como resolver o problema 1 no caso geral via geometria analítica,
isto é, sem compasso? E como resolvê-lo "classicamente", com
compasso?
Falta transcrever o resto:
(find-QUADRO "2011-11-11-GA-1.jpg")
(find-QUADRO "2011-11-11-GA-2.jpg")

29ª aula (16/nov):
30ª aula (18/nov): Não poder dar aula, a gente vai repor depois.

31ª aula (23/nov): Trailer do que vai acontecer nas próximas aulas
(com as idéias mais importantes).
Em problemas como
(A) calcular as interseções de uma reta com um círculo
(B) calcular as interseções de dois círculos
as contas são MUITO mais fáceis quando:
* um dos círculos tem centro na origem
* a reta é ou horizontal ou vertical ou passa pela origem
* o outro círculo tem centro em algum dos eixos
Exercício:
C = {(x,y)∈R^2 | x^2+y^2=5^2}
h = {(x,y)∈R^2 | y=3}
v = {(x,y)∈R^2 | x=2}
r = {(x,y)∈R^2 | y=2x}
Calcule a interseção de C com as retas h, v e r.
Um problema que vai nos ajudar:
Seja r = {(x,y)∈R^2 | y=ax+b}.
Encontre a equação de uma reta s que seja ortogonal a r e passe
pela origem e encontre a interseção rns.
(Solução: s = {(x,y)∈R^2 | y=ax+b},

```
            r∩s = {(-ab/(1+a^2), b/(1+a^2))})
  Aplicação:
    Encontre o ponto da reta r={(x,y)∈R^2 | y=2x+3}
      mais próximo da origem.
    Agora: sejam r a reta acima,
                 C={(x,y)∈R^2 | x^2+y^2=5^2},
                 r∩C={B,B'}.
    Quais são as coordenadas de M, o ponto médio de B e B'?
      (Resp: M=(-6/5, 3/5))
    Qual a distância de M à origem? (Vamos chamá-la de alfa)
    Qual a distância de M a B?      (Vamos chamá-la de beta)
      (Note que alfa^2 + beta^2 = 5^2)
    Encontre um vetor w ortogonal a OM de norma beta.
      (Dica: rode OM de 90° e multiplique pelo lambda certo)
  Agora vocês devem ser capazes de resolver este problema, bem maior:
    Sejam C' = {(x,y)∈R^2 | (x-2)^2+(y-3)^2=5^2}
        e  r = {(x,y)∈R^2 | y=2x+3}.
    Problemão: encontre C'∩r.
    Sub-problemas:
      Verifique que C é C' "deslocado pelo vetor (-2,-3)".
      Encontre a equação da reta r', que é a reta r "deslocada pelo
        vetor (-2,-3)".
      Encontre o ponto de r' mais próximo da origem.
      Encontre o ponto de r mais próximo do ponto (2,3).

32ª aula (25/nov): Algumas construções são fáceis em "geometria com
  régua e compasso" e difíceis em GA... mas o truque é que se
  deslocamos os objetos envolvidos as contas ficam fáceis.
  Vamos ver os seguintes problemas:
    (1) Distância de ponto a reta
    (2) Interseção de reta e círculo
    (3) Interseção de dois círculos
    (4) Como encontrar uma reta paralela a uma reta dada r que seja
        tangente a um círculo C
    (4) Como encontrar uma reta que passe por um ponto P e que seja
        tangente a um círculo C
  Vamos começar pelo (1). O caso fácil é quando o ponto A é a origem e
  a reta r está dada na forma r = {(x,y)∈R^2 | y=ax+b}. Aí temos que
  construir uma reta s que passe pela origem e seja ortogonal a r; aí
  encontramos o ponto B, r∩s={B}, e aí calculamos a distância ||AB||.
    Exercício 1: complete as contas, isto é, encontre expressões em
      função de a e b para as coordenadas do ponto B e encontre uma
      expressão "em função de a e b" (<- isto é um jargão importante!)
      para a distância ||AB||.
    Exercício 2: digamos que r = {(2,3)+t(4,5) | t∈R}.
      Expresse r na forma {(x,y)∈R^2 | y=ax+b}.
      Depois faça o mesmo para o caso geral, r = {(a,b)+t(c,d) | t∈R}.
      (Esta fórmula é importante, é bom você saber como derivá-la
      sozinho rápido quando precisar!)
    Exercício 3: sejam r = {(2,3)+t(4,5) | t∈R} e A = (1,6).
      e sejam       r' = {(2,3)+t(4,5)+v | t∈R} e A' = (1,6)+v.
      Encontre o vetor v tal que A'=(0,0), e expresse r' na forma
      {(x,y)∈R^2 | y=ax+b}.
      Sejam s e s' retas tais que r_|_s, A∈s, r'_|_s', A'∈s'.
      Sejam B e B' os pontos tais que r∩s={B} e r'∩s'={B'}.
      Calcule ||AB|| e ||A'B'||.
    Exercício 4: sejam C = {(x,y)∈R^2 | x^2+y^2=R^2}
             e C' = {(x,y)∈R^2 | (x-alfa)^2+y^2=R'^2}.
      Calcule os dois pontos de interseção de C e C'.
      (Obs: pra entender essa história do "em função de" faça um
      programa que a partir de R, R' e alfa calcule x e o valor
      positivo do y. A expressão para y é simples se ela puder usar o
      valor de x.)
  Pra casa: leiam acima o que aconteceu na aula de 4ª, entendam tudo e
  façam os exercícios!
```

```
33ª aula (30/nov): Hoje: dois assuntos da P2 do semestre passado:
    http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.pdf
    http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.djvu
  Primeiro: introdução a Hipérboles.
  Sejam H_1 = {(1,1/t) | t∈R^*},
        H_2 = {(1,2/t) | t∈R^*},
        H_3 = {(1,2) + t(1,0) + 1/t(-1,1) | t∈R^*}.
  Fizemos uma tabela com vários valores de t, conseguimos vários
  pontos de H_1 e H_2, plotamos eles e vimos que H_1 e H_2 têm como
  assíntotas os eixos x e y, mas são hipérboles diferentes.
    Idéia: pra determinar uma hipérbole temos que escolher as duas
  assíntotas dela e um outro parâmetro - que controla a distância das
  curvas à interseção das assíntotas.
    Exercício 1: para desenhar H_3 primeiro determine as assíntotas
  informalmente - nas hipérboles H_1 e H_2 podemos determinar as
  assíntotas vendo o comportamento de (t,-1/t) e (t,-2/t) quando t
  tende a -∞, +∞, a 0 pela esquerda e a 0 pela direita.
    Dica: quando t=-1000, (1,2) + t(1,0) + 1/t(-1,1)
        é aproximadamente (1,2) + t(1,0),
          quando t=-1001, (1,2) + t(1,0) + 1/t(-1,1)
        é aproximadamente (1,2) + t(1,0),
         quando t=1/1000, (1,2) + t(1,0) + 1/t(-1,1)
        é aproximadamente (1,2)          + 1/t(-1,1),
         quando t=1/1001, (1,2) + t(1,0) + 1/t(-1,1)
        é aproximadamente (1,2)          + 1/t(-1,1).
    Os alunos ficaram de terminar esse exercício em casa.
  Segundo assunto: introdução a 3D (um pouco de Geometria Descritiva).
    Vamos definir a projeção de um ponto (x,y,z)∈R^3 na épura
    como sendo este conjunto de três pontos de R^2:
      (x,y,z)_EP = {(x,y),(-z,y),(x,-z)}.
    Sejam A=(2,3,4), B=(1,3,4), C=(1,1,4), D=(1,1,1), e vamos usar a
    notação [A,B] para o segmento - em R^3! - que liga A a B.
    Exercício 2: represente tridimensionalmente, usando as épuras de
      papel que fizemos em sala e tirinhas de papel pros segmentos, o
      conjunto [A,B]∪[B,C]∪[C,D].
    Exercício 3: represente graficamente o subconjunto
      ([A,B]∪[B,C]∪[C,D])_EP de R^2. Pra adaptar a definição do "_EP"
      para conjuntos, podemos fazer o seguinte: se S é um subconjunto
      de R^3,
        S_EP = {(x,y) | (x,y,z)∈S}
            ∪ {(x,-z) | (x,y,z)∈S}
            ∪ {(-z,y) | (x,y,z)∈S}.
34ª aula (02/dez):

35ª aula (07/dez):
36ª aula (09/dez): P2

37ª aula (14/dez): VR (aberta - substitui a pior nota)
38ª aula (16/dez): VS
```

Notas até agora:

	T1	P1
Allan		1.0
Francielle		0.0
João		5.6
Kallyan		10.5
Lays		0.0
Leandro		3.5
Leonardo		9.0
Leonathan		1.0
Luis Felipe		0.0
Luis Fernando		2.0

Natalia	7.0
Natan Henrique	0.0
Natan Tavares	0.0
Paulo Cézar	
Pedro Paulo	2.0
Renan	1.0
Thiago	
Thaynara	
Vitor	2.5

As provas foram corrigidas pelo "Método Reginaldo": questões com erros graves (de qualquer tipo: conceitual, notação, etc) recebem inicialmente notas baixíssimas - geralmente zero - mas aí eu espero que os alunos venham discutí-las comigo na vista de prova e mostrem que aprenderam os assuntos daquelas questões. Vários alunos têm boas condições de ganharem até 4 pontos extras na vista de prova!

Obs: a vista de prova pode ser feita em qualquer momento em que eu estiver no PURO, nesta semana ou na semana que vem (a partir de 3ª de tarde).