Matemática Discreta
PURO/UFF - 2012.1
Prof: Eduardo Ochs
16/maio/2012

① Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que obedece:

$$\forall k \in \mathbb{N}.\ f(2k) = k$$
$$\land\ \forall k \in \mathbb{N}.\ f(2k+1) = 3(2k+1)+1.$$

ⓐ Calcule $f(1), f(2), \ldots, f(10)$ e $f(0)$. ⇦ 1.0 pts

ⓑ Calcule $f^1(6), f^2(6), \ldots, f^{12}(6)$, ⇦ 1.0 pts
onde: $f^0(a) = a$,
$f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$.

ⓒ Defina formalmente uma função C que recebe um $k \in \mathbb{N}$ e retorna a lista $(k, f(k), f^2(k), \ldots, 1)$. ⇦ 2.0 pts

② Calcule passo a passo o valor de ⇦ 1.0 pts
$\{3,4\} = \{4,3,4\}$
lembrando que a igualdade entre conjuntos é <u>definida</u> por:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

e que:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x \in X.\ x \in Y$$

e que quando $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$, temos:

$$c \in D \Leftrightarrow c = d_1 \lor \ldots \lor c = d_n.$$

③ Um dos problemas de indução do livro da Judith é: ⇦ 4.0 pts

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

Defina formalmente as seqüências $A(1), A(2), \ldots$ e $B(1), B(2), \ldots$ para transformar este problema num problema da forma

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n) = B(n)$$

e prove o passo de indução,

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n) = B(n) \to A(n+1) = B(n+1)$$

de forma que <u>cada uma das suas igualdades seja muito fácil de justificar</u>.

④ Seja $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ⇦ 2.0 pts
$(a,b) \mapsto a \# b$,
onde o "#" é a operação de concatenação que vimos em sala. Seja

$$G: (\mathbb{N} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N})) \times (\mathbb{N} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (\mathbb{N} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

a função definida por:

$\boxed{\text{I}}$ $G(a,b) = g(a,b)$ quando $a,b \in \mathbb{N}$,

$\boxed{\text{II}}$ $G(a,B) = \{g(a,b) \mid b \in B\}$ quando $a \in \mathbb{N}$ e $B \subseteq \mathbb{N}$,

$\boxed{\text{III}}$ $G(A,b) = \{g(a,b) \mid a \in A\}$ quando $A \subseteq \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$,

$\boxed{\text{IV}}$ $G(A,B) = \{g(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ quando $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

Calcule passo a passo

$$G(\{12,3\}, G(4, \{5,67\})).$$

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2012.1
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA (P1)
3/OUTUBRO/2012

(1) SEJA r UMA RETA DE $\mathbb{R}^2$, E PARA CADA PONTO $P \in \mathbb{R}^2$ VAMOS DEFINIR OS PONTOS P' E P'' DA SEGUINTE FORMA:
P' É O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE P, E
P'' É UM PONTO TAL QUE $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'P''}$.

(a) SEJAM $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$ E $C = (1,4)$. REPRESENTE GRAFICAMENTE r, C, C' E C'' E DÊ APROXIMAÇÕES PARA AS COORDENADAS DE C' E C''. AQUI, VOCÊ PODE USAR MÉTODOS OLHOMÉTRICOS SE QUISER. ⇐ 1.0 PTS

(b) SEJAM $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 + \frac{x}{3}\}$, $D = (0,1)$, $E = (1,1)$, $F = (2,1)$, $G = (g_1, g_2)$. CALCULE D'', E'', F'' E G''. ⇐ 3.0 PTS

(c) SEJAM $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$, $r = \{O + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}^2\}$, $W = (w_1, w_2)$. CALCULE AS COORDENADAS DE W' E DE W''. ⇐ 3.0 PTS

(2) NO ITEM 1c VOCÊ ENCONTROU FÓRMULAS PARA CALCULAR (w_1', w_2') E (w_1'', w_2'') A PARTIR DE (v_1, v_2) E (w_1, w_2); AGORA VOCÊ VAI USAR ESTAS FÓRMULAS PRA <u>DEFINIR</u>

$\mathrm{Pr}_{\vec{v}} \vec{w} = \vec{w'}$, A "PROJEÇÃO SOBRE $\vec{v}$ DE $\vec{w}$", E
$\mathrm{Refl}_{\vec{v}} \vec{w} = \vec{w''}$, A "REFLEXÃO POR $\vec{v}$ DE $\vec{w}$".

(a) MOSTRE QUE $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(4\vec{w}) = 4(\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w})$. ⇐ 1.0 PTS

(b) MOSTRE QUE $\mathrm{Pr}_{(5\vec{v})} \vec{w} =$ [redacted] $\mathrm{Pr}_{\vec{v}} \vec{w}$. ⇐ 1.0 PTS

(c) MOSTRE QUE SE $a \in \mathbb{R}$ ENTÃO $\mathrm{REFL}_{\vec{v}}(a\vec{w}) = a(\mathrm{REFL}_{\vec{v}}\vec{w})$. ⇐ 1.0 PTS

(d) MOSTRE QUE SE $\vec{u}$ É (OUTRO) VETOR DE $\mathbb{R}^2$ ENTÃO $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{w} + \vec{u}) = (\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w}) + (\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{u})$. ⇐ 1.0 PTS

(e) MOSTRE QUE $\mathrm{Refl}_{\vec{v}}(\vec{w} + \vec{u}) = (\mathrm{Refl}_{\vec{v}}\vec{w}) + (\mathrm{Refl}_{\vec{v}}\vec{u})$. ⇐ 1.0 PTS

(3) MOSTRE QUE NEM SEMPRE TEMOS $\mathrm{Pr}_{(\vec{u}+\vec{v})} \vec{w} = (\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}) + (\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w})$. ⇐ 2,0 PTS

$\boxed{\text{DICA:}}$ SÓ DA PRA FAZER AS QUESTÕES 2 E 3 SE VOCÊ TIVER CHEGADO ÀS FORMULAS CERTAS PARA Pr E Refl - ENTÃO <u>TESTE</u>!!!

BOA PROVA! :)

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2012.1
2ª Prova (P2)
Prof: Eduardo Ochs
26/outubro/2012

(1) Seja $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{3}x - 4\}$. ⇐ 1.0 pts
Encontre dois pontos da reta r que estejam a 5 unidades de distância do ponto $(3,-2) \in r$.
Confira as suas contas.

(2) Encontre dois pontos da reta r que estejam a 5 unidades de distância do ponto $(0,0) \notin r$. ⇐ 3.0 pts

(3) Derive uma fórmula (i.e., um procedimento) geral para calcular os pontos de interseção de um círculo de raio R centrado na origem com a reta r. ⇐ 6.0 pts
Nomeie, defina precisamente e represente graficamente cada objeto que você construir, e teste a sua fórmula com $R=4$ e $R=6$.

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2012.1
Segunda Prova (P2)
Prof: Eduardo Ochs
26/outubro/2012

Lembre que definimos que um <u>grupo</u> é uma 4-upla - i.e., uma lista de 4 elementos -

$(G, \cdot_G, e_G, \mathrm{inv}_G)$,

tal que:

- G é um conjunto,
- $\cdot_G : G \times G \to G$,
- $e_G \in G$,
- $\mathrm{inv}_G : G \to G$,
- $\forall a,b,c \in G.\ a \cdot_G (b \cdot_G c) = (a \cdot_G b) \cdot_G c$
- $\forall a \in G.\quad a \cdot_G e_G = e_G \cdot_G a = a$
- $\forall a \in G.\quad a \cdot_G \mathrm{inv}_G(a) = \mathrm{inv}_G(a) \cdot_G a = e_G$.

(1) Seja:

$\mathbb{Z}^*_{13} = (\{1, 2, \ldots, 12\}, \cdot_{13}, 1, f)$,

onde:

$a \cdot_{13} b = m_{13}(a \cdot b)$,

$f(a) = a^{11}$.

Note que neste caso

$$a^{11} = \underbrace{a \cdot_{13} a \cdot_{13} a \cdot_{13} \cdots \cdot_{13} a}_{11\ \text{"}a\text{"s}},$$

e $a^{11} = a^8 \cdot_{13} a^2 \cdot_{13} a$.

(a) Faça a tabela para a multiplicação em $\mathbb{Z}^*_{13}$, isto é, para $\cdot_{13} : \{1, 2, \ldots, 12\}^2 \to \{1, 2, \ldots, 12\}$. ⇐ 1.0 pts

(b) Faça a tabela para
$f : \{1, 2, \ldots, 12\} \to \{1, 2, \ldots, 12\}$. ⇐ 1.0 pts

(c) Calcule o valor de
$\forall a \in \{1, 2, \ldots, 12\}.$
$a \cdot_{13} f(a) = f(a) \cdot_{13} a = 1$. ⇐ 1.0 pts

(2) Nós provamos em sala que num grupo G, se $a, b, c \in G$ então: ⇐ 7.0 pts

$a \cdot b = a \cdot c \to b \cdot c$.

Prove formalmente que se o seu grupo é

$(G, \cdot, e, \mathrm{inv})$, com $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

e tabela do "$\cdot$" é

$\cdot$	α	β	γ
α	α	β	γ
β	?	?	?
γ	?	?	?

então $\gamma \cdot \gamma = \beta$.

Nesta questão o mais importante é você mostrar que sabe enunciar corretamente proposições, hipóteses, lemas, etc; o seu raciocínio pode ter alguns lemas que você não vai provar, desde que você indique claramente que falta demonstrá-los, e que o leitor se convença de que eles são bem mais fáceis que o problema original.