GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
1º TESTE - 7/ABRIL/2011

PARA CADA UMA DAS SENTENÇAS ABAIXO DETERMINE SE ELA É VERDADEIRA OU FALSA E <u>JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA</u>.

(1) OS CONJUNTOS
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 10\}$
E
$B = \{(-4,-1) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
SÃO RETAS PARALELAS.

(2) SEJAM $A = (-30, 21)$
E $B = (-10, 35)$.
ENTÃO O TRIÂNGULO ABO É RETÂNGULO.

(3) SE $B = A + \vec{v}$,
$C = A + \vec{w}$
E O TRIÂNGULO ABC É RETÂNGULO
ENTÃO
$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.

(4) SE $\vec{v} = \overrightarrow{(a,1)}$ E $\vec{w} = \overrightarrow{(b,-1)}$
SÃO ORTOGONAIS ENTÃO
$|a| = 1$ E $|b| = 1$.

ESTE TESTE É INDIVIDUAL E SEM CONSULTA. RESPONDA CLARAMENTE - LEMBRE QUE AS SUAS RESPOSTAS TÊM QUE SER COMPREENSÍVEIS POR LEITORES QUE NÃO SÃO TELEPATAS. QUESTÕES COM RESPOSTAS PARECIDAS DEMAIS COM AS DOS COLEGAS PODEM FAZER COM QUE TODO O SEU TESTE SEJA INVALIDADO.

NÃO ESQUEÇA DE INDICAR CLARAMENTE ONDE VOCÊ ESTÁ FAZENDO SUPOSIÇÕES, ONDE VOCÊ ESTÁ DEFININDO COISAS, ONDE VOCÊ ESTÁ CONCLUINDO COISAS, ETC. RESPOSTAS NAS QUAIS NÃO FOR POSSÍVEL IDENTIFICAR TUDO ISTO <u>PROVAVELMENTE SERÃO CONSIDERADAS ERRADAS</u>.

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
1º Teste - 7/Abril/2011

Gabarito

(1) Vamos tomar dois pontos em cada uma das retas:
$A_1, A_2 \in A$, $B_1, B_2 \in B$.

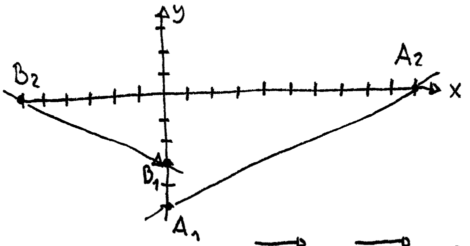
$A_1 = (0,-5)$ (repare que $0-2(-5)=10$)

$A_2 = (10,0)$ (repare que $10-2\cdot 0 = 10$)

$B_1 = (-4,-1) + 2\overrightarrow{(2,-1)} = (0,-3)$

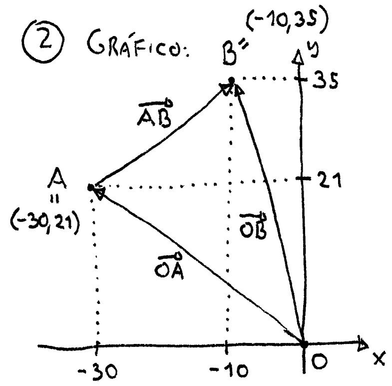
$B_2 = (-4,-1) - \overrightarrow{(2,-1)} = (-6,0)$

Gráfico:



Os vetores $\overrightarrow{B_2B_1}$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não são "paralelos" (não são múltiplos um do outro, são linearmente independentes), portanto as retas A e B não são paralelas.

(2) Gráfico:



$A\hat{O}B = 90°$ se e só se $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$,
ou seja, se $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{(-30,21)}\cdot\overrightarrow{(-10,35)}$
$= 300 + 735$
$= 1035$
$\neq 0$

$O\hat{A}B = 90°$ se e só se $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$,
ou seja, se $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-30,21)}\cdot\overrightarrow{(20,14)}$
$= -600 + 294$
$= -306$
$\neq 0$

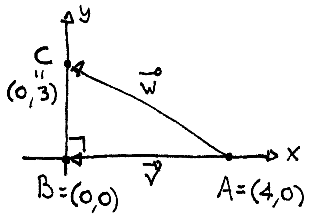
(2) (continuação)

$O\hat{B}A = 90°$ se e só se $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AB}$,
ou seja, se $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-10,35)}\cdot\overrightarrow{(20,14)}$
$= -200 + 490$
$= 290$
$\neq 0$

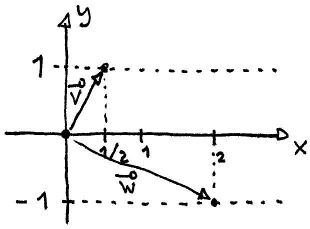
Nenhum dos três ângulos do triângulo OAB é [redacted] reto, portanto o triângulo OAB não é retângulo.

(3) Isto é falso.
O triângulo ABC abaixo:



é retângulo, mas
$||\overrightarrow{BC}||^2 = 3^2 = 9$
e
$||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$,
e portanto neste caso temos
$||\overrightarrow{BC}||^2 \neq ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$.

(4) Isto é falso.
Um contra-exemplo é $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$:



$\vec{v}\cdot\vec{w} = \overrightarrow{(\frac{1}{2},1)}\cdot\overrightarrow{(2,-1)}$
$= \frac{1}{2}\cdot 2 + 1(-1)$
$= 0$

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO-UFF - 2011.1
PRIMEIRA PROVA ("P1")
PROF: EDUARDO OCHS
19/MAIO/2011

(1) MOSTRE QUE TODO CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$ PODE SER REPRESENTADO NA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ DE MAIS DE UM MODO.

0,5 PONTOS

(2) MOSTRE QUE NEM TODO CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$ É UMA RETA.

0,5 PONTOS

(3) MOSTRE QUE NEM TODO CONJUNTO DA FORMA $\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$ É UMA RETA.

0,5 PONTOS

(4) MOSTRE QUE NEM TODA RETA É UM CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$.

0,5 PONTOS

(5) LEMBRE QUE A NOSSA DEFINIÇÃO "ALGÉBRICA" DE CÍRCULO É A SEGUINTE: UM CÍRCULO É UM CONJUNTO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\},$$

ONDE O PARÂMETRO R É UM NÚMERO REAL ESTRITAMENTE POSITIVO.
MOSTRE QUE TODO CÍRCULO É UM CONJUNTO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\},$$

MAS NEM TODO CONJUNTO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\}$$

É UM CÍRCULO.
ALÉM DISSO MOSTRE COMO CONVERTER ENTRE AS REPRESENTAÇÕES

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\}$$

E

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\}$$

(QUANDO POSSÍVEL).

4,0 PONTOS

(6) QUANDO C É UM CÍRCULO CENTRADO NA ORIGEM E r É UMA RETA QUE TANGENCIA O CÍRCULO NO PONTO $A=(a,b)$ TEMOS:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=a^2+b^2\},$$

$$r=\{(a,b)+t\overrightarrow{(b,-a)} \mid t\in\mathbb{R}\}.$$

UTILIZE UMA MUDANSA DE COORDENADAS QUE SEJA UMA TRANSLAÇÃO (ISTO É, $x'=x+\alpha$, $y'=y+\beta$) PARA CARACTERIZAR CÍRCULOS E RETAS C' E r' TAIS QUE:

6,0 PONTOS

A RETA r' TANGENCIE C' NUM PONTO A' <u>E</u> r' PASSE PELA ORIGEM. <u>DICAS:</u> COMECE REPRESENTANDO GRAFICAMENTE AS CONSTRUÇÕES QUE VOCÊ VAI FAZER E EXPLICANDO-AS EM PORTUGUÊS, DEPOIS TRADUZA CADA PASSO DA CONSTRUÇÃO PARA A SUA VERSÃO "ALGÉBRICA", E SEMPRE QUE NECESSÁRIO TESTE AS SUAS FÓRMULAS COM EXEMPLOS CONCRETOS.

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO-UFF - 2011.1
GABARITO DA P1 DE 19/MAIO/2011, QUE FOI TRANSFORMADA EM LISTA DE EXERCÍCIOS
PROF: EDUARDO OCHS

(1) [O ENUNCIADO DESTA QUESTÃO ESTÁ MEIO INCOMPLETO - EU IRIA EXPLICÁ-LO NO QUADRO LOGO ANTES DA PROVA. A IDÉIA É QUE UM CONJUNTO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$$

É DETERMINADO PELOS PARÂMETROS a E b... DOIS PARES DE PARÂMETROS DIFERENTES, (a,b) E (a',b') COM $(a,b)\neq(a',b')$, QUE GEREM A MESMA RETA SERIAM DUAS "REPRESENTAÇÕES DIFERENTES" PARA MESMA RETA.]

....

A EQUAÇÃO $y=ax+b$ VALE SE E SÓ SE VALER $-ax+y-b=0$, E SE E SÓ SE VALER $200ax-200y+200b=0$.
ENTÃO TEMOS:

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\} &= \\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -ax+y-b=0\} \quad (*)\\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 200ax-200y+200b=0\} \quad (**)\end{aligned}$$

E COMO O COEFICIENTE DO y (O "β") É DIFERENTE EM (*) E (**) ENTÃO (*) E (**) SÃO DUAS REPRESENTAÇÕES DIFERENTES.

(2) QUANDO $(a,b,c)=(0,0,666)$ TEMOS

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\} &= \\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y+666=0\}=\emptyset,\end{aligned}$$

QUE NÃO É UMA RETA; E QUANDO $(a,b,c)=(0,0,0)$ TEMOS

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\} &= \\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+0y+0=0\}=\mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

QUE TAMBÉM NÃO É UMA RETA.

(3) QUANDO $A=(3,4)$ E $\vec{v}=\overrightarrow{(0,0)}$ TEMOS

$$\begin{aligned}\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\} &= \\ &=\{(3,4)+t\overrightarrow{(0,0)} \mid t\in\mathbb{R}\}\\ &=\{(3+0t,4+0t) \mid t\in\mathbb{R}\}\\ &=\{(3,4) \mid t\in\mathbb{R}\}\\ &=\{(3,4)\},\end{aligned}$$

QUE NÃO É UMA RETA.

(4) A RETA VERTICAL $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=3\}$ NÃO É UM CONJUNTO DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\}$.

(5) AS SEGUINTES EQUAÇÕES SÃO EQUIVALENTES:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$
$$(x^2-2x_0x+x_0^2)+(y^2-2y_0y+y_0^2)-R^2=0$$
$$x^2+(-2x_0)x+y^2+(-2y_0)+(x_0^2+y_0^2-R^2)=0$$

PORTANTO

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\} &= \\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(-2x_0)x+y^2+(-2y_0)+(x_0^2+y_0^2-R^2)=0\}.\end{aligned}$$

QUANDO $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$ TEMOS

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\} &= \\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\}\\ &=\{(0,0)\},\end{aligned}$$

QUE NÃO É UM CÍRCULO; E QUANDO $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,-1)$ TEMOS

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\} &= \\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=-1\}\\ &=\emptyset,\end{aligned}$$

QUE TAMBÉM NÃO É UM CÍRCULO.

PARA CONVERTER UM CÍRCULO DA FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\} \quad (*)$$

PARA A FORMA

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\alpha x+y^2+\beta y+\gamma=0\} \quad (**)$$

PODEMOS FAZER

$$\alpha=-2x_0,$$
$$\beta=-2y_0,$$
$$\gamma=x_0^2+y_0^2-R^2,$$

COMO VIMOS ACIMA;
E PARA CONVERTER DA FORMA (**) PARA (*) PODEMOS FAZER O SEGUINTE: AS EQUAÇÕES ABAIXO SÃO EQUIVALENTES,

$$(x^2+\alpha x)+(y^2+\beta y)+\gamma=0$$
$$\left((x+\tfrac{\alpha}{2})^2-\tfrac{\alpha^2}{4}\right)+\left((y+\tfrac{\beta}{2})^2-\tfrac{\beta^2}{4}\right)+\gamma=0$$
$$(x+\tfrac{\alpha}{2})^2+(y+\tfrac{\beta}{2})^2=\tfrac{\alpha^2}{4}+\tfrac{\beta^2}{4}-\gamma$$

PORTANTO DEVEMOS TOMAR

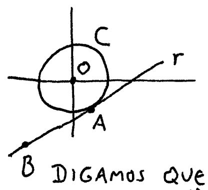
$$x_0=-\tfrac{\alpha}{2},$$
$$y_0=-\tfrac{\beta}{2},$$
$$R^2=\tfrac{\alpha^2}{4}+\tfrac{\beta^2}{4}-\gamma$$
$$R=\sqrt{\tfrac{\alpha^2}{4}+\tfrac{\beta^2}{4}-\gamma},$$

MAS ISTO SÓ FUNCIONA QUANDO $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma>0$.

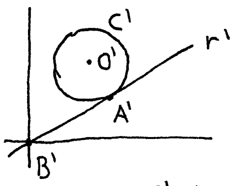
[CONTINUA...]

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO-UFF - 2011.1
GABARITO DA P1 DE
19/MAIO/2011, QUE FOI
TRANSFORMADA EM LISTA DE
EXERCÍCIOS
PROF: EDUARDO OCHS

(6) GRAFICAMENTE, A SITUAÇÃO DO PROBLEMA ANTES DA TRANSLAÇÃO É ESTA AQUI:



DIGAMOS QUE O PONTO $B \in r$, $B = A + u(\overrightarrow{b,-a})$, SEJA O QUE É LEVADO NA ORIGEM PELA TRANSLAÇÃO. ENTÃO TEMOS ISTO AQUI:



ONDE
$$O' = (0+\alpha, 0+\beta) = (\alpha, \beta),$$
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2+b^2\},$$
$$A' = (a+\alpha, b+\beta),$$
$$r' = \{A' + t(\overrightarrow{b,-a}) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$B' = A' + u(\overrightarrow{b,-a}) = (a+\alpha, b+\beta) + (\overrightarrow{ub,-ua}) = (a+\alpha+ub, b+\beta-ua).$$

COMO SABEMOS QUE $B' = (0,0)$ TEMOS QUE TER $\alpha = -a-ub$ E $\beta = -b+ua$;

ENTÃO
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+a+ub)^2 + (y+b-ua)^2 = a^2+b^2\},$$
$$A' = (a-a-ub, b-b+ua) = (-ub, ua),$$
$$r' = \{(-ub, ua) + t(\overrightarrow{b,-a}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(\overrightarrow{b,-a}) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
PENSE SOBRE ESTE PASSO!
$$B' = (0,0).$$

AGORA QUE FIZEMOS TODAS AS CONTAS PODEMOS RESOLVER O PROBLEMA ORIGINAL. DIGAMOS QUE r' SEJA UMA RETA QUALQUER QUE PASSE PELA ORIGEM E C' SEJA UM CÍRCULO TANGENTE A r'. SEJAM A' O PONTO DE TANGÊNCIA ENTRE C' E r', E SEJA O' O CENTRO DO CÍRCULO C'. ENTÃO O', C', A' E r' SÃO DA FORMA:
$$O' = (-a-ub, -b+ua),$$
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+a+ub)^2 + (y+b-ua)^2 = a^2+b^2\},$$
$$A' = (-ub, ua),$$
$$r' = \{t(\overrightarrow{b,-a}) \mid t \in \mathbb{R}\},$$
PARA $a,b,u \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$.

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
2/JUNHO/2011

(1) A AFIRMAÇÃO ABAIXO É VERDADEIRA OU FALSA? JUSTIFIQUE. (1.0 PONTOS)
SEJAM $C \subset \mathbb{R}^2$ UM CÍRCULO E $\alpha \in \mathbb{R}$ UM NÚMERO REAL POSITIVO. ENTÃO O CONJUNTO DOS PONTOS CUJA DISTÂNCIA A C É α É UM CÍRCULO.

(2) SEJAM
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$
E $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0\}$.

(a) ENCONTRE QUATRO PONTOS DIFERENTES DE C E REPRESENTE GRAFICAMENTE C E r. (1.0 PONTOS)

(b) REPRESENTE GRAFICAMENTE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),C) = 1\}$ E $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),r) = 1\}$. (1.0 PONTOS)

(c) ENCONTRE CINCO PONTOS DE $\mathbb{R}^2$ QUE SEJAM EQUIDISTANTES DE C E DE r. (1.0 PONTOS)

(d) ENCONTRE A EQUAÇÃO DE UMA PARÁBOLA CUJOS PONTOS SEJAM TODOS EQUIDISTANTES DE C E DE r. (3.0 PONTOS)

(3) SEJAM
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$
E C E C' CÍRCULOS EM $\mathbb{R}^2$, COM CENTROS C_0 E C_0' E RAIOS R E R' RESPECTIVAMENTE, E QUE OBEDECEM AS SEGUINTES CONDIÇÕES:

(I) C, C' E r SÃO TANGENTES ENTRE SI,
(II) C_0 ESTÁ SOBRE O EIXO HORIZONTAL,
(III) C_0 E C_0' TÊM COORDENADA x POSITIVA,
(IV) C_0' TEM COORDENADA y POSITIVA.

(a) DIGAMOS QUE $R = R' = 2$. ENCONTRE AS COORDENADAS DE C_0' E REPRESENTE r, C, C' GRAFICAMENTE. (0,5 PONTOS)

(b) DIGAMOS QUE $R = 2$ E $R' = 3$. ENCONTRE AS COORDENADAS DE C_0' E REPRESENTE r, C, C' GRAFICAMENTE. (0,5 PONTOS)

(c) GENERALIZE: SE R E R' SÃO REAIS POSITIVOS QUAISQUER, QUAIS SÃO AS COORDENADAS DE C_0 E C_0'? (2,0 PONTOS)

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Primeira Prova ("P1")
2/junho/2011

GABARITO

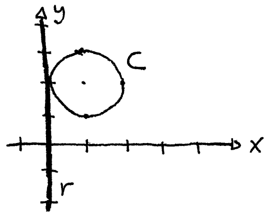
(1) Se C é o círculo de centro $(0,0)$ e raio 2 e $\alpha=1$ então o conjunto dos pontos cuja distância a C é α é a união de dois círculos disjuntos, ambos centrados na origem, um com raio 3 e outro com raio 1. Este conjunto não é um círculo, portanto a afirmação é falsa.

(2a) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2-2x)+(y^2-4y+4)=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ((x^2-2x+1)-1)+(y-2)^2=0\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-2)^2=1^2\}$,

portanto C é o círculo de raio 1 e centro $(1,2)$.
É fácil verificar (fazendo as contas) que $(0,2)\in C$, $(2,2)\in C$, $(1,3)\in C$, $(1,1)\in C$.
Graficamente:

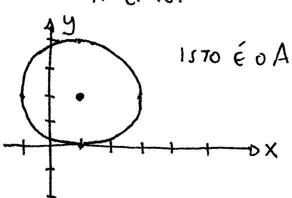


(2b) Vamos dar nomes para estes conjuntos:

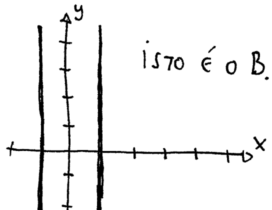
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),C)=1\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),r)=1\}$.

O conjunto A vai ser um círculo de centro $(1,2)$ e raio 2 e mais um ponto (que podemos ver como um círculo degenerado) em $(1,2)$; o conjunto B vai ser a união de duas retas verticais, uma com todos os pontos com $x=-1$, outra com todos os pontos com $x=1$.
Graficamente:



isto é o A,



isto é o B.

(2c) A interseção dos conjuntos A e B do item anterior,

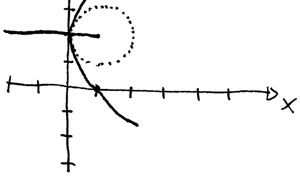
$A\cap B=\{(-1,2),(1,4),(1,2),(1,0)\}$

nos dá todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão à distância 1 tanto de C quanto de r, e o conjunto

$C\cap r=\{(0,2)\}$

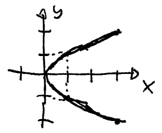
tem todos os pontos que estão à distância 0 tanto de C quanto de r.

(2d) Dá pra ver, por argumentos geométricos que não vou detalhar aqui no gabarito, que o conjunto dos pontos equidistantes de C e r deve ter esta forma:



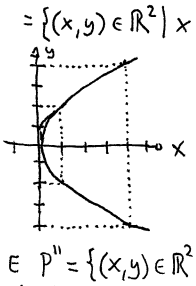
ou seja, ele é a união da semi-reta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq 1,\ y=2\}$ com uma curva que parece ser uma parábola... Pra verificar que ela é realmente uma parábola nós vamos encontrar a equação da parábola que passa pelos pontos $\{(0,2),(1,4),(1,0)\}$ e testar se os pontos dela são equidistantes de r e de C.

$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^2\}$ é:



$P'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=(\frac{y}{2})^2\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y^2/4\}$ é:



e $P''=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=(y-2)^2/4\}$ é P' deslocado duas unidades para cima.
É fácil conferir que $(0,2),(1,4),(1,0)\in P''$, e que para cada ponto de

$P''=\{((y-2)^2/4,\ y) \mid y\in\mathbb{R}\}$

$=\{(t^2/4,\ t+2) \mid t\in\mathbb{R}\}$

temos $d((t^2/4,t+2),r)=t^2/4$,

$d((t^2/4,t+2),C)=d((t^2/4,t),(1,0))-1$

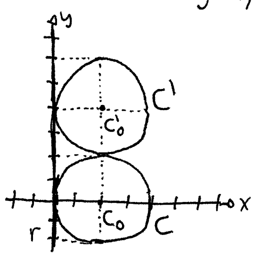
$=d((\frac{t^2}{4}-1,t),(0,0))-1$

$=t^2/4$.

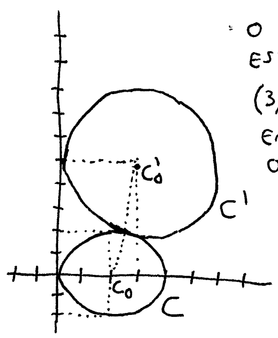
GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
2/JUNHO/2011

GABARITO (CONT.)

(3a) SE $R=2$ ENTÃO $C_0=(2,0)$,
E SE $R'=2$ ENTÃO $C_0'=(2,y')$;
COMO C E C' SÃO TANGENTES
TEMOS $d(C_0,C_0') = R+R' = 4$
E PELA CONDIÇÃO (IV) TEMOS
$y'>0$. ENTÃO $y'=4$, E A FIGURA É:



(3b) SE $R=2$ E $R'=3$ ENTÃO
$C_0=(2,0)$ E $C_0'=(3,y')$;
DEVEMOS TER $d(C_0,C_0')=R+R'=5$,
MAS:
$$d(C_0,C_0') = d((2,0),(3,y'))$$
$$= \sqrt{(2-3)^2+(0-y')^2}$$
$$= \sqrt{1+y'^2}$$
ENTÃO: $5 = \sqrt{1+y'^2}$
$$5^2 = 1+y'^2$$
$$y'^2 = 25-1 = 24$$
$$y' = \sqrt{24}.$$
GRAFICAMENTE:



• O PONTO $C_0'=(3,\sqrt{24})$
ESTÁ UM POUCO ABAIXO DO PONTO
$(3,5)$, E O PONTO DE TANGÊNCIA
ENTRE C E C' ESTÁ SOBRE
O SEGMENTO $\overline{C_0C_0'}$. :

(3c) NO CASO GERAL VAMOS TER:
$C_0=(R,0)$,
$C_0'=(R',y')$,
$d(C_0,C_0')=R+R'$ E
$d(C_0,C_0') = \sqrt{(R-R')^2+y'^2}$,
PORTANTO:
$$(R+R')^2 = (R-R')^2+y'^2$$
$$\cancel{R^2}+2RR'+\cancel{R'^2} = \cancel{R^2}-2RR'+\cancel{R'^2}+y'^2$$
$$4RR' = y'^2$$
$$y' = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$$
OU SEJA, AS COORDENADAS DE C_0 E C_0' SÃO:
$C_0=(R,0)$
$C_0'=(R',2\sqrt{RR'})$.

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE MUDANÇA DE SISTEMA DE COORDENADAS
PROF: EDUARDO OCHS
9/JUNHO/2011

EM TODOS OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA VAMOS TER (PELO MENOS) UMA MUDANÇA DE COORDENADAS E (PELO MENOS) UM CONJUNTO.

A NOSSA PRIMEIRA MUDANÇA DE COORDENADAS VAI SER:

$(x', y') = (x+2, y+1)$

OU, COMO DUAS EQUAÇÕES SEPARADAS:

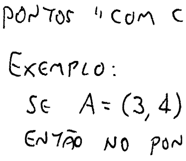
$x' = x+2$

$y' = y+1$

VAMOS USÁ-LA PARA TRANSFORMAR PONTOS "COM COORDENADAS x, y" EM PONTOS "COM COORDENADAS x', y'".

EXEMPLO:
SE $A = (3, 4)$
ENTÃO NO PONTO A TEMOS
$x = 3$,
$y = 4$.
PELAS EQUAÇÕES $x' = x+2$
E $y' = y+1$,
TEMOS $x' = 3+2 = 5$
$y' = 4+1 = 5$
E VAMOS CRIAR UM PONTO A' — A "IMAGEM DE A PELA MUDANÇA DE COORDENADAS" — CUJAS COORDENADAS VÃO SER x', y'.

(1) SEJAM O, C, B, E, D ("ORIGEM", "CIMA", "BAIXO", "ESQUERDA", "DIREITA") OS SEGUINTES PONTOS:



PARA CADA UM DESTES PONTOS CALCULE A SUA IMAGEM PELA MUDANÇA DE COORDENADAS, E REPRESENTE O CONJUNTO $\{O', C', B', E', D'\}$ GRAFICAMENTE.

(2) SEJA $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.
ESCOLHA TRÊS PONTOS DIFERENTES DE r, CHAME-OS DE A, B, C, CALCULE A', B', C' E VEJA SE A', B', C' ESTÃO NUMA MESMA RETA.

(3) NA PROVA TÍNHAMOS UMA PARÁBOLA COM UMA EQUAÇÃO COMPLICADA:

$P'' = \{(t^2/4, t+2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

VAMOS DEFINIR:

$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t^2/4, t+2)$

CALCULE $P(-2), P(-1), P(0), P(1), P(2)$,
$P'(-2), P'(-1), P'(0), P'(1), P'(2)$,
$P(\{-2,-1,0,1,2\})$,
$P'(\{-2,-1,0,1,2\})$,
E ESBOCE $P(\mathbb{R})$ E $P'(\mathbb{R})$.

A MUDANÇA DE COORDENADAS $(x', y') = (x+2, y+1)$ É UMA TRANSLAÇÃO. ELA LEVA RETAS EM RETAS, CÍRCULOS EM CÍRCULOS, PARÁBOLAS EM PARÁBOLAS, ETC, E ELA PRESERVA DISTÂNCIAS E ÂNGULOS.
E AS MUDANÇAS DE COORDENADAS

$(x'', y'') = (2x, \frac{y}{4})$

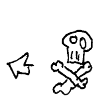
E $(x''', y''') = (x, x+y)$?

AS AFIRMATIVAS ABAIXO SÃO VERDADEIRAS OU FALSAS? JUSTIFIQUE.

(4) SE $C \subset \mathbb{R}^2$ É UM CÍRCULO ENTÃO C'' É UM CÍRCULO.

(5) SE $C \subset \mathbb{R}^2$ É UM CÍRCULO ENTÃO C''' É UM CÍRCULO.

(6) SE Q É UMA PARÁBOLA ENTÃO Q'' É UMA PARÁBOLA.



(7) SE Q É UMA PARÁBOLA ENTÃO Q''' É UMA PARÁBOLA.

DICA: COMECE COM UMA PARÁBOLA Q ESPECÍFICA. CALCULE ALGUNS PONTOS DE Q''' E O SEU EIXO DE SIMETRIA.

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
16/junho/2011

Sejam $(O, \vec{v}, \vec{w})$,
$(O', \vec{v'}, \vec{w'})$,
$(O'', \vec{v''}, \vec{w''})$,
$(O''', \vec{v'''}, \vec{w'''})$ quatro sistemas de coordenadas, e sejam C_6, C_7, C_8, C_9 os seguintes conjuntos:

$$C_6 = \{O + x\vec{v} + y\vec{w} \mid x \in \{-1,1\},\ y \in \{-1,1\}\},$$
$$C_7 = \{O + x\vec{v} + y\vec{w} \mid x, y \in [-1,1]\},$$
$$C_8 = \{O + t\vec{v} + t^2\vec{w} \mid t \in \mathbb{R}\},$$
$$C_9 = \{O + x\vec{v} + y\vec{w} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x=0 \text{ ou } y=0\}$$

e C_6', C_6'', C_6''',
C_7', C_7'', C_7''',
C_8', C_8'', C_8''',
C_9', C_9'', C_9'''
são definidos da mesma forma que C_6, C_7, C_8, C_9 mas usando os outros sistemas de coordenadas; por exemplo,

$$C_8'' = \{O'' + t\vec{v''} + t^2\vec{w''} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Seja $(O, \vec{v}, \vec{w}) = ((0,0), \overrightarrow{(1,0)}, \overrightarrow{(0,1)})$.
Represente graficamente C_6, C_7, C_8, C_9.

(2) Sejam $(O', \vec{v'}, \vec{w'}) = ((2,1), \overrightarrow{(1,0)}, \overrightarrow{(0,1)})$
e $(O'', \vec{v''}, \vec{w''}) = ((2,1), \overrightarrow{(-1,0)}, \overrightarrow{(0,1)})$.

(2a) Represente graficamente C_6', C_6'',
C_7', C_7'',
C_8', C_8'',
C_9', C_9''

(2b) Se reescrevermos a definição de C_8'' usando u ao invés de t,
$$C_8'' = \{O'' + u\vec{v''} + u^2\vec{w''} \mid u \in \mathbb{R}\},$$
fica mais fácil ver a correspondência entre "t"s e "u"s. Qual é o ponto de C_8' correspondente a $t=4$?
Para vermos que este ponto pertence a C_8'' também temos que um valor de u que corresponda a este ponto; que valor é este? Generalize: que valor de u corresponde a um t qualquer?

MINI-TESTE DE
GEOMETRIA ANALÍTICA
(PREPARAÇÃO PARA A P2)
6/JULHO/2011
PURO/UFF
PROF: EDUARDO OCHS

① SEJAM $A=(1,2,3)$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(0,1,1)}$,
$\vec{w}=\overrightarrow{(1,2,-1)}$,

E α O PLANO
$\alpha=\{A+t\vec{v}+u\vec{w} \mid t,u\in\mathbb{R}\}$.

SE O PONTO $(a,3,5)$ PERTENCE A α, QUAL É O VALOR DE a?

② REPRESENTE GRAFICAMENTE AS HIPÉRBOLES:

$H_1=\{A+t\vec{v}+u\vec{w} \mid t,u\in\mathbb{R} \text{ E } tu=1\}$,
$H_2=\{A+t\vec{v}+u\vec{w} \mid t,u\in\mathbb{R} \text{ E } tu=2\}$,
$H_0=\{A+t\vec{v}+u\vec{w} \mid t,u\in\mathbb{R} \text{ E } tu=0\}$

(OBS: H_0 É DEGENERADA),

ONDE:

$A=(0,0)$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$,
$\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$.

③ FAÇA O MESMO QUE NO EXERCÍCIO ANTERIOR, MAS AGORA COM ESTES VALORES PARA $A, \vec{v}, \vec{w}$:

$A=(1,1)$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(0,1)}$,
$\vec{w}=$ [redacted] $\overrightarrow{(1,1)}$.

④ SEJA $r=\{A+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\}$,
ONDE $A=(2,2)$
E $\vec{v}=\overrightarrow{(1,2)}$

(OBS: VAMOS MUDAR A E $\vec{v}$ NA PRÓXIMA QUESTÃO).

SEJA $\vec{w}$ UM VETOR PERPENDICULAR A $\vec{v}$, r' UMA RETA PARALELA A r PASSANDO PELA ORIGEM, E s UMA RETA PERPENDICULAR A r QUE PASSA PELA ORIGEM.

TODO PONTO $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ É DA FORMA $(A+t\vec{v})+u\vec{w}$ PARA ALGUM VALOR DE $t,u\in\mathbb{R}$. ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA OBTER t E u A PARTIR DE x E y, E DEPOIS ENCONTRE UM MODO ALGÉBRICO DE ENCONTRAR:

- O PONTO DE r' MAIS PRÓXIMO DE (x,y),
- O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DE (x,y),
- A REFLEXÃO DE (x,y) POR r',
- A REFLEXÃO DE (x,y) POR r.

NÃO FAÇA AS CONTAS DIRETO - AS CHANCES DE VOCÊ ERRAR FAZENDO ISTO SÃO ENORMES. NESTE PROBLEMA SEMPRE COMECE PELA DESCRIÇÃO EM PORTUGUÊS DO QUE VOCÊ ESTÁ FAZENDO (OU MELHOR: PELA DESCRIÇÃO EM PORTUGUÊS DO QUE ESTÁ ACONTECENDO "GRAFICAMENTE").

⑤ (BONUS) GENERALIZE O PROBLEMA ANTERIOR: AGORA $A\in\mathbb{R}^2$ VAI SER UM PONTO QUALQUER E $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ VAI SER UM VETOR QUALQUER.

⑥ SEJAM $A=(0,0)$,
$\vec{v}=\overrightarrow{(0,1)}$,
$\vec{w}=\overrightarrow{(1,0)}$.

MOSTRE QUE AS SEGUINTES PARÁBOLAS SÃO IGUAIS:

$P_1=\{A+a\vec{v}+a^2\vec{w} \mid a\in\mathbb{R}\}$,
$P_2=\{A+b(2\vec{v})+b^2(4\vec{w}) \mid b\in\mathbb{R}\}$,
$P_3=\{(A-2\vec{v}+4\vec{w})+c(-2\vec{v}+8\vec{w})+c^2(4\vec{w}) \mid c\in\mathbb{R}\}$

⑦ FAÇA A MESMA COISA QUE NA ⑥, MAS AGORA PARA $A, \vec{v}, \vec{w}$ QUAISQUER.

⑧ SEJAM $A=(1,1,1)$,
$B=(3,3,1)$,
$C=(2,0,4)$.

O TRIÂNGULO ABC É RETÂNGULO?

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
SEGUNDA PROVA ("P2")
7/JULHO/2011

(1) SEJAM
$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y=4\}$
E $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-2)^2=4\}$.

(a) ENCONTRE QUATRO PONTOS DE C E REPRESENTE r E C GRAFICAMENTE. $\boxed{\text{0,5 PONTOS}}$

(b) ENCONTRE UM MODO ALGÉBRICO DE CALCULAR A REFLEXÃO DE QUALQUER PONTO (x,y) POR r. $\boxed{\text{2,0 PONTOS}}$

(c) SEJA C' A REFLEXÃO DE C POR r. CALCULE C', REPRESENTE-O GRAFICAMENTE E DÊ UMA DESCRIÇÃO ALGÉBRICA DE C'. $\boxed{\text{2,0 PONTOS}}$

(2) SEJAM
$A = (1,1,2)$
$B = (3,5,1)$
$C = (5,4,2)$.

SE $S \subset \mathbb{R}^3$ É UM CONJUNTO, A "PROJEÇÃO DE S NA ÉPURA", S_{EP}, É DEFINIDA DESTA FORMA:

$$S_{EP} = \{(x,y) \mid (x,y,z) \in S\} \cup \{(-z,y) \mid (x,y,z) \in S\} \cup \{(-z,-x) \mid (x,y,z) \in S\}$$

(a) CALCULE E REPRESENTE GRAFICAMENTE O CONJUNTO $\{A,B,C\}_{EP}$. $\boxed{\text{1,0 PONTOS}}$

(b) O TRIÂNGULO ABC É RETÂNGULO? JUSTIFIQUE. $\boxed{\text{0,5 PTS}}$

(c) O TRIÂNGULO ABC É DEGENERADO? JUSTIFIQUE. $\boxed{\text{0,5 PTS}}$

(d) REPRESENTE GRAFICAMENTE $\{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0, \frac{1}{2}]\}_{EP}$. $\boxed{\text{1,5 PTS}}$

(3) SEJAM
$A = (2,1)$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$,
$\vec{w} = \overrightarrow{(-1,1)}$,
$\vec{v}' = \overrightarrow{(2,-2)}$,
$\vec{w}' = \overrightarrow{(1,0)}$,

E PARA QUALQUER $k \in \mathbb{R}$,
$H_k = \{A + t\vec{v} + u\vec{w} \mid t,u \in \mathbb{R} \text{ E } tu = k\}$,
$H'_k = \{A + t'\vec{v}' + u'\vec{w}' \mid t',u' \in \mathbb{R} \text{ E } t'u' = k\}$.

(a) REPRESENTE GRAFICAMENTE H_0, H_1, H'_0, H'_1. $\boxed{\text{1,5 PONTOS}}$

(b) ENCONTRE ALGUM PAR DE VALORES $k, k' \in \mathbb{R}$, AMBOS DIFERENTES DE 0, TAIS QUE H_k E $H'_{k'}$ TENHAM UM PONTO EM COMUM. $\boxed{\text{1,0 PONTOS}}$

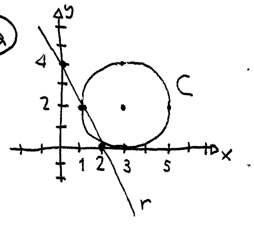
(c) PROVE QUE $H_k = H'_{k'}$. $\boxed{\text{2,0 PONTOS}}$

A PROVA VALE MAIS DE 10 PONTOS, ENTÃO A CORREÇÃO PODE SER BEM EXIGENTE. CAPRICHE!
BOA PROVA!

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Segunda Prova ("P2")
7/julho/2011

Mini-gabarito

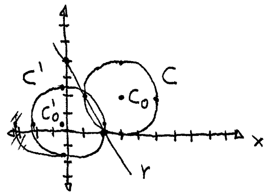
(1a)



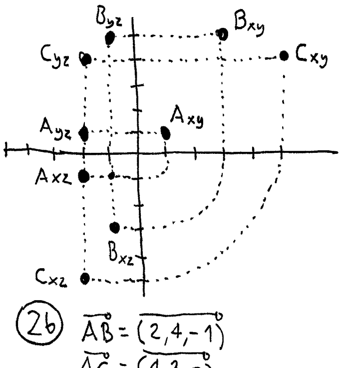
$(3,4) \in C$
$(1,2) \in C$
$(5,2) \in C$
$(3,0) \in C$

(1b) $\mathrm{Refl}_r(x,y) = \left(\frac{16-3x-4y}{5}, \frac{8-4x+3y}{5}\right)$

(1c) Vamos chamar de C_0 o centro do círculo C; $C_0 = (3,2)$.
Seja $C_0' = \mathrm{Refl}_r(C_0) = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.
Então
$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+\frac{1}{5})^2 + (y-\frac{2}{5})^2 = 4\}$.
Graficamente:



(2a) $\{(1,1,2), (3,5,1), (5,4,2)\}_{EP} =$
$\{(1,1), (-2,1), (-2,-1),$
$(3,5), (-1,5), (-1,-3),$
$(5,4), (-2,4), (-2,-5)\}$



(2b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(2,4,-1)}$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(4,3,0)}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(2,-1,1)}$

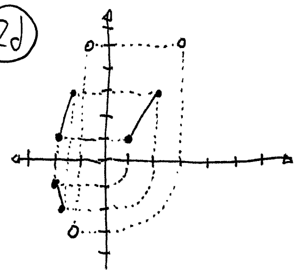
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -1$
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -4$

Nenhum dos três angulos do triângulo ABC é reto.

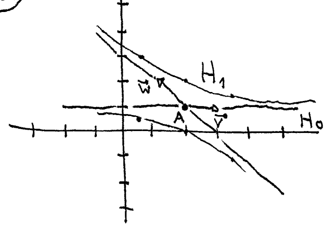
(2c) $\sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{21}$
$\sqrt{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}} = 5$
$\sqrt{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}} = \sqrt{6}$

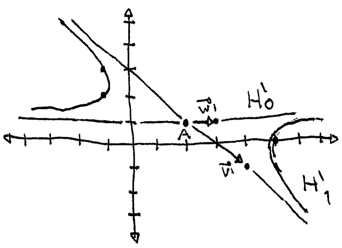
Se o triângulo ABC fosse degenerado algum dos seus lados teria comprimento igual à soma dos outros dois.

(2d)



(3a)





(3b) $A + \vec{v}' + \vec{w}' = A + \vec{v} - 2\vec{w}$
pertence a H_1' e a H_{-2}.

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PROVA SUPLEMENTAR ("VS")
14/JULHO/2011

(1) SEJAM

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2\}$$

E $r = \{(0,1) + t\overrightarrow{(-3,4)} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

ENCONTRE UMA RETA PARALELA A r QUE SEJA TANGENTE A C.

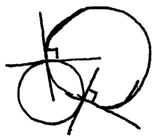
2,0 PTS

(2) A PROJEÇÃO SOBRE $\vec{v}$ DE $\vec{w}$, $Pr_{\vec{v}}\vec{w}$, É O VETOR DA FORMA $\lambda\vec{v}$ TAL QUE $O+\lambda\vec{v}$ É O MAIS PRÓXIMO POSSÍVEL DE $O+\vec{w}$. MOSTRE COMO CALCULAR λ E $\lambda\vec{v}$ NUM CASO ESPECÍFICO E NO CASO GERAL.

3,0 PTS

(3) ENCONTRE DOIS CÍRCULOS, C E C', COM CENTROS C_0 E C_0' E RAIOS R E R' RESPECTIVAMENTE, QUE SE "CORTEM ORTOGONALMENTE" (VEJA A FIGURA).

3,0 PTS



SE ELES SE CORTAM NOS PONTOS A E B E D É O PONTO DE INTERSEÇÃO ENTRE AS RETAS C_0C_0' E AB, O QUE VOCÊ PODE DIZER SOBRE O QUADRILÁTERO $C_0AC_0'B$?

USE ISTO PARA DETERMINAR SE OS CÍRCULOS

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-4x+5y-2=0\}$$

E $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2+2y^2+4x-6y-19=0\}$

SE CORTAM ORTOGONALMENTE.

(4) QUAL É O PONTO DE INTERSEÇÃO ENTRE A RETA $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}$ E [redacted] A RETA OA, ONDE $A=(a,b)$?

1,5 PTS

(5) ENCONTRE A INTERSEÇÃO ENTRE O PLANO $\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=5\}$

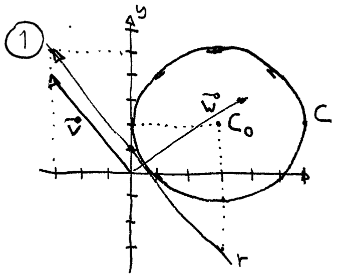
E: O PLANO xy,
O PLANO xz,
O PLANO yz.

1,0 PTS

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Prova Suplementar ("VS")
14/julho/2011

Gabarito

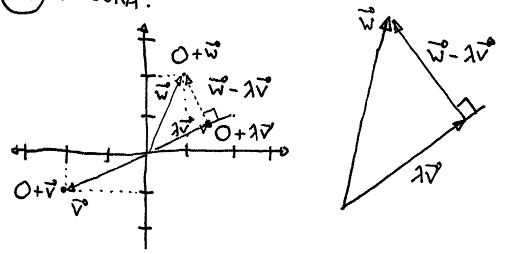
(1)



Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{(-3,4)}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{(4,3)}$.
O círculo C tem raio 3,
e como $\|\vec{w}\| = 5$ o vetor
$\frac{3}{5}\vec{w}$ tem norma igual a 3.
Então $C_0 - \frac{3}{5}\vec{w}$ está sobre o
círculo, e $s = \{C_0 - \frac{3}{5}\vec{w} + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
é uma reta paralela a r que
é tangente a C - e o ponto
de tangência é

$$\begin{aligned} C_0 - \tfrac{3}{5}\vec{w} &= (3,2) - \tfrac{3}{5}\overrightarrow{(4,3)} \\ &= (3 - \tfrac{12}{5},\ 2 - \tfrac{9}{5}) \\ &= (\tfrac{30-24}{10},\ \tfrac{20-18}{10}) \\ &= (\tfrac{6}{10},\ \tfrac{2}{10}) = (\tfrac{3}{5},\ \tfrac{1}{5}) \end{aligned}$$

(2) Figura:

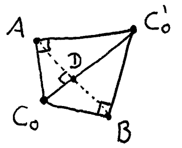


Queremos que a distância de $0+\vec{w}$
a $0+\lambda\vec{v}$ seja a menor possível, ou
seja, que $(0+\vec{w}) - (0+\lambda\vec{v}) = \vec{w} - \lambda\vec{v}$
seja perpendicular a $\lambda\vec{v}$ - ou seja,
queremos $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \lambda\vec{v} = 0$. Isto tem
duas soluções, uma com $\lambda = 0$ e uma
outra; a outra é a que nos interessa,
e é a em que $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$.
Como $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} - \lambda\vec{v} \cdot \vec{v}$
queremos $\lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v}$, ou seja,

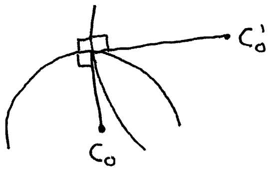
$$\lambda = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

No exemplo da figura acima temos
$\vec{v} = \overrightarrow{(-2,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,2)}$, $\lambda = \frac{-2-2}{5} = -\frac{4}{5}$,
$\lambda\vec{v} = \overrightarrow{(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})}$.

(3) Vamos fazer uma figura só
com os pontos C_0, C_0', A, B e
o quadrilátero formado por eles.



Como $A, B \in C$ temos $d(A,C_0) = d(B,C_0)$, e
como $A, B \in C'$ temos $d(A,C_0') = d(B,C_0')$, e,
por simetria, $\overline{AB} \perp \overline{C_0C_0'}$ e $d(A,D) = d(B,D)$.
Além disso $C_0\hat{A}C_0' = C_0\hat{B}C_0' = 90°$ - veja:



E portanto o triângulo AC_0C_0'
é retângulo (e o triângulo BC_0C_0' também).
Como $d(A,C_0) = d(B,C_0) = R$
e $d(A,C_0') = d(B,C_0') = R'$,
e $R^2 + R'^2 = d(C_0,C_0')^2$ por Pitágoras -
na verdade C e C' vão se cortar ortogonalmente
se e só se $R^2 + R'^2 = d(C_0,C_0')^2$.
Então:

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 + 5y - 2 = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 5y + \tfrac{25}{4}) - \tfrac{49}{4} = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y + \tfrac{5}{2})^2 = (\tfrac{7}{2})^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 3y - \tfrac{19}{2} = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 3y + \tfrac{9}{4}) - \tfrac{51}{4} = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y - \tfrac{3}{2})^2 = (\tfrac{\sqrt{51}}{2})^2\} \end{aligned}$$

Daí $C_0 = (2, -\frac{5}{2})$, $R = \frac{7}{2}$,
$C_0' = (-1, \frac{3}{2})$, $R' = \frac{\sqrt{51}}{2}$

$d(C_0,C_0')^2 = 3^2 + (\frac{8}{2})^2 = 5^2$,
$R^2 + R'^2 = \frac{49}{4} + \frac{51}{4} = \frac{100}{4} = 25$,
e C e C' se cortam ortogonalmente.

(4) Se $(x,y) \in OA = \{(ta,tb) \mid t \in \mathbb{R}\}$
e $(x,y) \in r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$
e $(x,y) = (ta,tb)$ então $ta^2 + tb^2 = c$; daí $t = \frac{c}{a^2+b^2}$
e $(x,y) = (\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2})$.

(5) $\alpha \cap$ plano xy: $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 5\}$
$\alpha \cap$ plano xz: $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 4z = 5\}$
$\alpha \cap$ plano yz: $\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 4z = 5\}$