Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Primeira Prova ("P1")
9/novembro/2011

1) Defina, usando notação de conjuntos e matematiquês formal - sem português, ⇐ 1.0 pts

a) o conjunto dos vetores horizontais incluindo o vetor nulo,

b) o conjunto dos vetores ~~verticais~~ horizontais excluindo o vetor nulo,

c) o conjunto dos vetores verticais incluindo o vetor nulo,

d) o conjunto dos vetores verticais excluindo o vetor nulo.

Dê um nome para cada um destes conjuntos.

Obs: quase todo texto de matemática "sério" tem algumas definições que podem parecer ambíguas à primeira vista, mas o critério para resolver as ambiguidades é sempre o mesmo: a definição "correta" é sempre ~~a definição~~ a definição "mais natural", isto é, dentre as definições naturais a mais simples. Por exemplo: o "conjunto dos vetores horizontais" é ou o que você definiu no item a ou o do item b, e "vetor horizontal" quer dizer "elemento do conjunto dos vetores horizontais".

2) Se $A \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v}, \vec{w}$ são vetores de $\mathbb{R}^2$, o <u>paralelogramo gerado por A, $\vec{v}$ e $\vec{w}$</u> é o paralelogramo $A(A+\vec{v})(A+\vec{v}+\vec{w})(A+\vec{w})$.

a) Se a diagonal $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ deste paralelogramo é horizontal então a diagonal $A(A+\vec{v}+\vec{w})$ é vertical? (Sim, não, justifique). ⇐ 1.0 pts

b) Se a diagonal $A(A+\vec{v}+\vec{w})$ é vertical e $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ então a diagonal $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ é horizontal? (Sim, não, justifique). ⇐ 2.0 pts

3) Seja ABC um triângulo em $\mathbb{R}^2$. ⇐ 1.5 pts
Descreva o procedimento para calcular a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, nomeando todos os objetos que você precisa construir e descrevendo como obtê-los a partir dos anteriores. Depois teste o seu procedimento no caso $A=(-2,4)$, $B=(-2,1)$, $C=(4,1)$.

4) Seja ABC um triângulo qualquer no qual:

I) o coeficiente angular da reta AB é $\alpha \neq 0$,

II) o coeficiente angular da reta AC é $-\alpha$,

III) o coeficiente angular da reta BC é β,

IV) a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ corta o lado BC no ponto D.

Correção: (*) ... vertical ou horizontal; daqui por diante suporemos que ele é vertical.

Então:

a) Prove que o segmento AD é vertical, (*) ⇐ 2.0 pts

b) Prove que as componentes horizontais dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{DB}$ são iguais, e faça o mesmo para os vetores $\vec{AC}$ e $\vec{DC}$. ⇐ 1.0 pts

c) Prove que $\dfrac{\|\vec{BD}\|}{\|\vec{AB}\|} = \dfrac{\|\vec{CD}\|}{\|\vec{AC}\|}$. ⇐ 2.0 pts

5) Logo depois da P1 vamos ver como "rodar" a demonstração da questão anterior e generalizá-la para casos nos quais a bissetriz AD não precisa ser vertical - e este método vai valer para muitas demonstrações, não só para esta. A "versão geral" da demonstração do 4 vai ser o: ⇐ 2.0 pts

<u>Teorema 5.</u> Em qualquer triângulo ABC, se $D \in BC$ e AD é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, temos $\dfrac{\|\vec{BD}\|}{\|\vec{AB}\|} = \dfrac{\|\vec{CD}\|}{\|\vec{AC}\|}$.

Esta questão é só pra ver se você sabe aplicar um teorema destes. Digamos que $B=(2,1)$, $C=(5,3)$, $\|\vec{AB}\| = 10$, $\|\vec{AC}\| = 15$. Se $D \in BC$ e AD é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, quais são as coordenadas de D?

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
9/NOVEMBRO/2011

GABARITO

1) a) $H = \{\overrightarrow{(x,0)} \mid x \in \mathbb{R}\}$

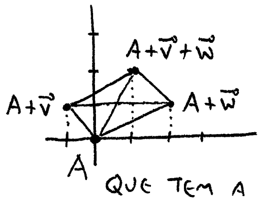
b) $H^* = \{\overrightarrow{(x,0)} \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

c) $V = \{\overrightarrow{(0,y)} \mid y \in \mathbb{R}\}$

d) $V^* = \{\overrightarrow{(0,y)} \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

2) a) SE $A = (0,0)$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(-1,1)}$,
$\vec{w} = \overrightarrow{(2,1)}$

ENTÃO O PARALELOGRAMO
$A(A+\vec{v})(A+\vec{v}+\vec{w})(A+\vec{w})$ É:



QUE TEM A DIAGONAL $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ HORIZONTAL E A DIAGONAL $(A)(A+\vec{v}+\vec{w})$ NÃO-VERTICAL.

b) SE $\vec{v} = \overrightarrow{(v_x, v_y)}$
E $\vec{w} = \overrightarrow{(w_x, w_y)}$

ENTÃO A DIAGONAL $A(A+\vec{v}+\vec{w})$ É VERTICAL SE E SÓ SE $\vec{v}+\vec{w}$ É UM VETOR VERTICAL; COMO

$$\vec{v}+\vec{w} = \overrightarrow{(v_x, v_y)} + \overrightarrow{(w_x, w_y)} = \overrightarrow{(v_x+w_x, v_y+w_y)},$$

ISTO ACONTECE SE E SÓ SE $v_x + w_x = 0$, OU SEJA, SE $w_x = -v_x$.

A CONDIÇÃO $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ É EQUIVALENTE A $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2$, OU SEJA, A $v_x^2 + v_y^2 = w_x^2 + w_y^2$;

SE AS DUAS CONDIÇÕES VALEM TEMOS

$$v_x^2 + v_y^2 = (-v_x)^2 + w_y^2 = v_x^2 + w_y^2,$$ E DAÍ

$v_y^2 = w_y^2$, OU SEJA,
$|v_y| = |w_y|$, OU SEJA,
$v_y = \pm v_y$.

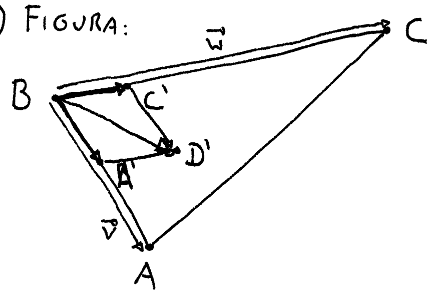
PORTANTO OU $\vec{w} = \overrightarrow{(w_x, w_y)} = \overrightarrow{(-v_x, v_y)}$
OU $\vec{w} = \overrightarrow{(w_x, w_y)} = \overrightarrow{(-v_x, -v_y)}$.

NO CASO $\vec{w} = \overrightarrow{(-v_x, v_y)}$
A DIAGONAL $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ VAI "SER"

$$\vec{w} - \vec{v} = \overrightarrow{(w_x, w_y)} - \overrightarrow{(v_x, v_y)} = \overrightarrow{(-v_x, v_y)} - \overrightarrow{(v_x, v_y)} = (-2v_x, 0),$$

QUE É HORIZONTAL, E NO CASO $\vec{w} = \overrightarrow{(-v_x, -v_y)} = -\vec{v}$
A DIAGONAL $(A+\vec{v})(A+\vec{w})$ "É" O VETOR NULO, QUE É HORIZONTAL.
PORTANTO A AFIRMAÇÃO É VERDADEIRA.

3) FIGURA:



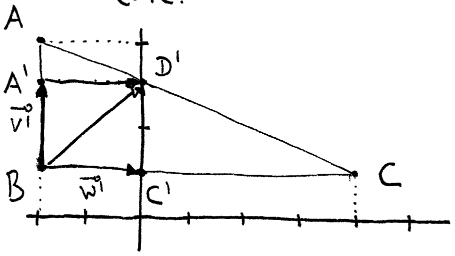
SEJAM $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$
E $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$.

SEJAM $\vec{v}' = \alpha\vec{v}$
E $\vec{w}' = \beta\vec{w}$ VETORES COM $\|\vec{v}'\| = \|\vec{w}'\|$, COM α, β REAIS POSITIVOS — POR EXEMPLO, $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ E $\vec{w}' = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

SEJAM $A' = B + \vec{v}'$,
$C' = B + \vec{w}'$,
$D' = B + \vec{v}' + \vec{w}'$.

ENTÃO BD' É A BISSETRIZ DE $A\hat{B}C$.

TESTE:



$\alpha = \frac{2}{3}$, $\vec{v}' = \overrightarrow{(0,2)}$,

$\beta = \frac{1}{3}$, $\vec{w}' = \overrightarrow{(2,0)}$,

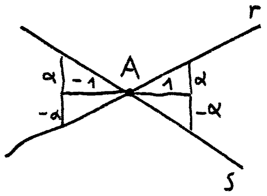
$BD' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+3\}$

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
9/NOVEMBRO/2011.

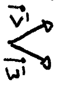
GABARITO - CONT...

(4) a) SEJAM $r = \{A + t\overrightarrow{(1,\alpha)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
A RETA QUE PASSA POR A E B,
E $s = \{A + t\overrightarrow{(1,-\alpha)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
A RETA QUE PASSA POR A E C.

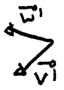
FIGURA:



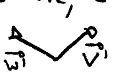
SE ESCOLHERMOS $\vec{v'}$ E $\vec{w'}$
ASSIM:



OU ASSIM:

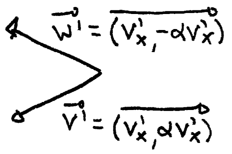


OBTEREMOS UMA RETA BISSETRIZ HORIZONTAL, E SE OS ESCOLHERMOS ASSIM

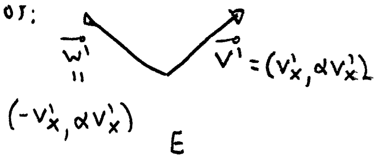


OU ASSIM

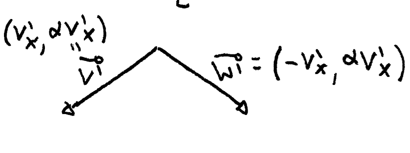
OBTEREMOS UMA BISSETRIZ VERTICAL.
AS CONTAS FICAM FÁCEIS SE ESCREVEMOS TUDO EM FUNÇÃO DE v'_x - POR EXEMPLO:



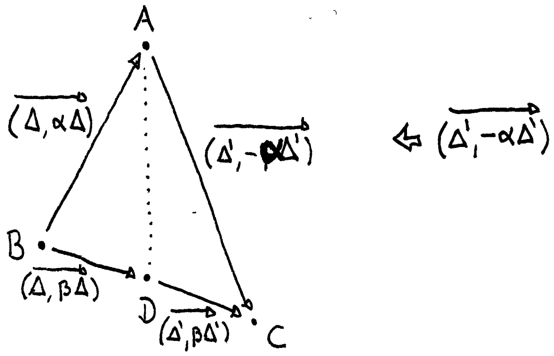
NOS DOIS CASOS QUE NOS INTERESSAM TEMOS:



E



4b) SEJAM $A = (A_x, A_y)$, $B = (B_x, B_y)$,
$C = (C_x, C_y)$, $D = (D_x, D_y)$,
$\Delta = A_x - B_x$,
$\Delta' = C_x - B_x$.
ENTÃO NÃO É DIFÍCIL VER QUE A FIGURA É:



DAÍ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-\Delta, -\alpha\Delta)}$,
$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{(-\Delta, -\beta\Delta)}$,
E AS COORDENADAS HORIZONTAIS DESTES DOIS VETORES SÃO IGUAIS;
DA MESMA FORMA,
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(\Delta', -\alpha\Delta')}$,
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(\Delta', \beta\Delta')}$,
E AS COMPONENTES HORIZONTAIS DESTES DOIS VETORES SÃO AMBAS IGUAIS A Δ', E PORTANTO IGUAIS.

4c) $$\frac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{(\Delta, \beta\Delta)}\|}{\|\overrightarrow{(-\Delta, -\alpha\Delta)}\|} = \frac{|\Delta|\,\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{|\Delta|\,\|\overrightarrow{(1,\alpha)}\|} = \frac{\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{\|\overrightarrow{(1,\alpha)}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{(-\Delta', -\beta\Delta')}\|}{\|\overrightarrow{(\Delta', -\alpha\Delta')}\|} = \frac{|\Delta'|\,\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{|\Delta'|\,\|\overrightarrow{(1,-\alpha)}\|} = \frac{\|\overrightarrow{(1,\beta)}\|}{\|\overrightarrow{(1,\alpha)}\|}$$

(5) COMO D PERTENCE AO SEGMENTO BC
SABEMOS QUE $\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{BC}$
E $\overrightarrow{DC} = \beta\overrightarrow{BC}$,
PARA ALGUM $\alpha \in \mathbb{R}$ E ALGUM $\beta \in \mathbb{R}$, E, MAIS AINDA,
$\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, E $\alpha + \beta = 1$.
VAMOS ESCREVER SÓ AB PARA $\|\overrightarrow{AB}\|$,
CD PARA $\|\overrightarrow{CD}\|$, ETC.
SABEMOS QUE $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ E QUE $AB = 10$ E $AC = 15$.
ENTÃO $\frac{BD}{10} = \frac{CD}{15}$, $\frac{\alpha BC}{10} = \frac{\beta BC}{15}$, $\frac{\alpha}{10} = \frac{\beta}{15}$, ..., $\alpha = \frac{2}{5}$ E $\beta = \frac{3}{5}$.
COMO $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(5-2, 3-1)} = \overrightarrow{(3,2)}$ E $\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{(3,2)} = \overrightarrow{(1.2, 0.8)}$,
ENTÃO $D = B + \overrightarrow{BD} = (2,1) + \overrightarrow{(1.2, 0.8)} = (3.2, 1.8)$.

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
SEGUNDA PROVA ("P2")
9/DEZEMBRO/2011

PARA CADA PONTO $A=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ PODEMOS DEFINIR AS SUAS TRÊS "PROJEÇÕES NA ÉPURA", A_{xy}, A_{xz} E A_{zy}, DA SEGUINTE FORMA:

$$A_{xy}=(x,y,z)_{xy}=(x,y)$$
$$A_{xz}=(x,y,z)_{xz}=(x,-z)$$
$$A_{zy}=(x,y,z)_{zy}=(-z,y)$$

E A PROJEÇÃO NA ÉPURA DE A, A_{EP}, VAI SER FORMADA POR ESTES TRÊS PONTOS:

$$A_{EP}=\{A_{xy},A_{xz},A_{zy}\}$$

E SE $S\subset\mathbb{R}^3$ É UM SUBCONJUNTO DE $\mathbb{R}^3$ NÓS PODEMOS DEFINIR AS PROJEÇÕES S_{xy}, S_{xz}, S_{zy} E S_{EP} DE FORMA CORRESPONDENTE:

$$\begin{aligned}S_{xy}&=\{A_{xy}\mid A\in S\}\\&=\{(x,y)\mid(x,y,z)\in S\}\\S_{xz}&=\{A_{xz}\mid A\in S\}\\&=\{(x,-z)\mid(x,y,z)\in S\}\\S_{zy}&=\{A_{zy}\mid A\in S\}\\&=\{(-z,y)\mid(x,y,z)\in S\}\\S_{EP}&=S_{xy}\cup S_{xz}\cup S_{zy}\\&=\{(x,y)\mid(x,y,z)\in S\}\\&\cup\{(x,-z)\mid(x,y,z)\in S\}\\&\cup\{(-z,y)\mid(x,y,z)\in S\}\end{aligned}$$

SE $\vec{v}$ É UM VETOR EM $\mathbb{R}^3$ TAMBÉM PODEMOS DEFINIR $\vec{v}_{xy}$, $\vec{v}_{xz}$ E $\vec{v}_{zy}$ DE FORMA SIMILAR. POR EXEMPLO, SE $\vec{v}=\overrightarrow{(x,y,z)}$ ENTÃO $\vec{v}_{xz}=\overrightarrow{(x,-z)}$. NOTE QUE $\vec{v}_{EP}$ É UM OBJETO MATEMÁTICO BEM MAIS ESQUISITO - UM CONJUNTO DE TRÊS VETORES.

AS NOÇÕES DE PRODUTO INTERNO, NORMA E ORTOGONALIDADE EM $\mathbb{R}^3$ SÃO PRATICAMENTE IDÊNTICAS ÀS EM $\mathbb{R}^2$: SE $\vec{v}=\overrightarrow{(x,y,z)}$ E $\vec{w}=\overrightarrow{(x',y',z')}$, ENTÃO

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=xx'+yy'+zz',$$
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}},$$

E $\vec{v}\perp\vec{w}$ SE E SÓ SE $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

(1) SEJAM $A=(2,0,0)$, $B=(0,3,0)$, $C=(0,0,4)$, $D=(1,0,2)$, $E=(4,2,\frac{7}{2})$, E VAMOS USAR AS NOTAÇÕES $\overline{PQ}$ PARA O SEGMENTO $\{P+t\overrightarrow{PQ}\mid t\in[0,1]\}$ E ΔPQR PARA O TRIÂNGULO (OCO) $\overline{PQ}\cup\overline{QR}\cup\overline{RP}$.

SEJAM $T=\Delta ABC$ E $F=T\cup\overline{DE}$
(MNEMÔNICOS: "TRIÂNGULO" E "FIGURA")

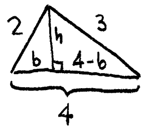
(a) REPRESENTE GRAFICAMENTE $F_{EP}\subset\mathbb{R}^2$, COM TODOS OS 15 NOMES DE PONTOS - A_{xy}, A_{xz}, A_{zy}, ..., E_{zy}. SEJA BEM CLARO NO SEU DESENHO - ESTA FIGURA VAI AJUDAR MUITO VOCÊ NOS PRÓXIMOS ITENS. (1,5 PONTOS)

(b) SEJA $\alpha\subset\mathbb{R}^3$ ESTE PLANO: $\alpha=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\}$. MOSTRE QUE $A,B,C,D\in\alpha$ E QUE $E\notin\alpha$. (0,5 PONTOS)

(c) MOSTRE QUE $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{CA}$ E $(\overrightarrow{DE})_{xz}\perp(\overrightarrow{CA})_{xz}$, MAS $(\overrightarrow{DE})_{xy}\perp(\overrightarrow{CA})_{xy}$ É FALSO. (0,5 PONTOS)

(d) CALCULE A ÁREA DE T_{xy}, A ÁREA DE T_{xz} E A ÁREA DE T_{zy}. (0,5 PONTOS)

(2) UM MODO DE CALCULAR A ÁREA DE UM TRIÂNGULO DE LADOS 2, 3 E 4 É O SEGUINTE. TRAÇAMOS A SUA ALTURA, h, E ELA DIVIDE A BASE EM DOIS SEGMENTOS,



UM DE COMPRIMENTO b E OUTRO DE COMPRIMENTO $4-b$. POR PITÁGORAS, TEMOS

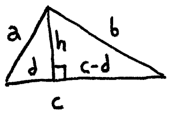
$$b^2+h^2=2^2=4$$
$$(4-b)^2+h^2=3^2=9$$

E SUBTRAINDO ESTAS EQUAÇÕES UMA DA OUTRA OBTEMOS $9-4=(4-b)^2-b^2$, QUE NOS PERMITE CALCULAR b FACILMENTE; E DEPOIS DE OBTERMOS b PODEMOS CALCULAR h POR $b^2+h^2=4$, E AÍ A ÁREA DO TRIÂNGULO GRANDE É $\frac{4\cdot h}{2}$.

CONTINUA

Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Segunda prova ("P2")
9/dezembro/2011
[continuação...]

(2a) Generalize o método que você acabou de ver, para um triângulo qualquer de lados a, b e c. Mais precisamente, encontre fórmulas para d, h e para a área do triângulo da figura abaixo: (2,0 pontos)



(b) Calcule a área do triângulo ΔABC da questão 1. (1,0 pontos)

(3) Sejam: $O' = (0,1)$, $\vec{v}' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{w}' = (-1,1)$, $O^* = (-1,-\frac{1}{2})$, $\vec{v}^* = (1,-\frac{1}{2})$, $\vec{w}^* = (1,\frac{1}{2})$,

e para cada ponto $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ definimos:

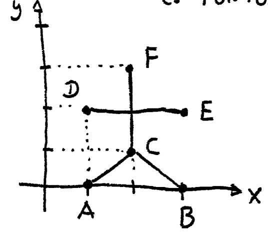
$$P' = (x,y)' = O' + x\vec{v}' + y\vec{w}',$$
$$P^* = (x,y)^* = O^* + x\vec{v}^* + y\vec{w}^*.$$

(a) Mostre que para qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ temos (1,0 pontos)

$$(a,b)'^* = (a,b)$$

e $(a,b)^{*\prime} = (a,b)$.

(b) Sejam A, B, C, D, E, F os seguintes pontos: (1,0 pontos)



e seja G o conjunto $G = \overline{AC} \cup \overline{BC} \cup \overline{CF} \cup \overline{DE}$.

Represente graficamente o conjunto $G' = \overline{A'C'} \cup \overline{B'C'} \cup \overline{C'F'} \cup \overline{D'E'}$.

(c) Faça o mesmo para o conjunto (1,0 pontos)

$$G^* = \overline{A^*C^*} \cup \overline{B^*C^*} \cup \overline{C^*F^*} \cup \overline{D^*E^*}.$$

(d) Seja H a hipérbole canônica, (0,5 pontos)

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\},$$

e $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \frac{1}{t})$.

Dê as coordenadas de 6 pontos da hipérbole H (sugestão: $f(-2)$, $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(2)$) e represente H graficamente.

(e) Como a hipérbole H do item anterior é (0,5 pontos)

$$H = \{(t, \tfrac{1}{t}) \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

podemos definir a sua imagem pela transformação "'" desta forma:

$$H' = \{(t,\tfrac{1}{t})' \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$
$$= \{O' + t\vec{v}' + \tfrac{1}{t}\vec{w}' \mid t \in \mathbb{R}^*\}.$$

Represente graficamente a hipérbole H'.

(4) Muitas pessoas tentaram resolver o problema 5 da P1 encontrando algebricamente os dois pontos de interseção entre dois círculos, e para isto elas usaram um método que não funcionava. Neste problema vamos entender onde é que ele dava errado.

Sejam
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2^2,$$
$$g(x,y) = (x-4)^2 + y^2 - 3^2,$$
$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{2} + \frac{g(x,y)}{2},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\},$$
$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\},$$
$$C'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\}.$$

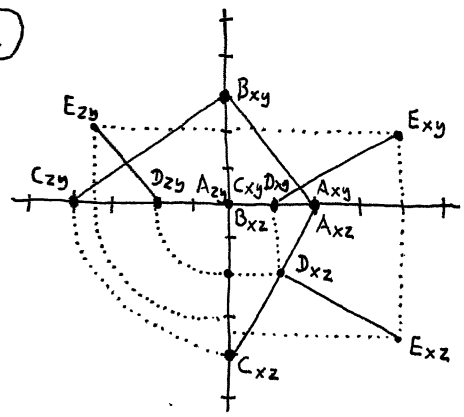
(a) Encontre 4 pontos pertencentes a C e 4 pontos pertencentes a C'. Além disso represente graficamente C e C'. (0,5 pontos)

(b) O conjunto C'' é um círculo centrado no ponto $(2,0)$. Descubra o seu raio e encontre 4 pontos de C''. (0,5 pontos)

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
9/DEZEMBRO/2011
SEGUNDA PROVA ("P2")

GABARITO

(1a)



(b) $A=(2,0,0) \in \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\}$

SE E SÓ SE $\frac{2}{2}+\frac{0}{3}+\frac{0}{4}=1$,

O QUE É VERDADE;

$B=(0,3,0)\in\alpha$

SE E SÓ SE $\frac{0}{2}+\frac{3}{3}+\frac{0}{4}=1$,

QUE É VERDADE;

IDEM PARA C E D.

$E=(4,2,\frac{7}{2})\in\alpha$

SE E SÓ SE $\frac{4}{2}+\frac{2}{3}+\frac{7/2}{4}=1$,

MAS $\frac{4}{2}+\frac{2}{3}+\frac{7/2}{4}>1$.

(c) $\overrightarrow{AB}=(-2,3,0)$,

$\overrightarrow{BC}=(0,-3,4)$,

$\overrightarrow{CA}=(2,0,-4)$,

$\overrightarrow{DE}=(3,2,1.5)$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=-6+6+0=0$,

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DE}=0-6+6=0$,

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DE}=6+0-6=0$,

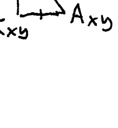
$\overrightarrow{DE}_{xz}=\overrightarrow{(3,-1.5)}$,

$\overrightarrow{CA}_{xz}=\overrightarrow{(2,4)}$, $\quad \overrightarrow{DE}_{xz}\cdot\overrightarrow{CA}_{xz}=6-6=0$,

$\overrightarrow{DE}_{xy}=\overrightarrow{(3,2)}$

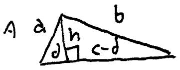
$\overrightarrow{CA}_{xy}=\overrightarrow{(2,0)}$ $\quad \overrightarrow{DE}_{xy}\cdot\overrightarrow{CA}_{xy}=6+0=6$.

(d) PELA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ITEM 1a,

ÁREA(T_{xy}) = ÁREA() $=\frac{2\cdot 3}{2}=3$,

ÁREA$(T_{xz})=\frac{4\cdot 3}{2}=6$,

ÁREA$(T_{zy})=\frac{2\cdot 4}{2}=4$.

(2a) NA FIGURA 

TEMOS $d^2+h^2=a^2$,

$(c-d)^2+h^2=b^2$,

$(c-d)^2-d^2=b^2-a^2$,

$c^2-2cd=b^2-a^2$,

$-2cd=b^2-a^2-c^2$,

$d=\dfrac{b^2-a^2-c^2}{-2c}$,

$h^2=a^2-d^2$,

$h=\sqrt{a^2-d^2}$,

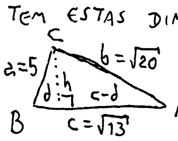
ÁREA$(\triangle)=\frac{ch}{2}$.

(b) $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{9+16}=5$,

$\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$,

PORTANTO O TRIÂNGULO $\triangle ABC$
TEM ESTAS DIMENSÕES:



E APLICANDO AS FÓRMULAS DO ITEM 2a
TEMOS: $d=\dfrac{20-25-13}{-2\sqrt{13}}=\dfrac{-18}{-2\sqrt{13}}=\dfrac{9}{\sqrt{13}}$,

$h=\sqrt{25-\frac{81}{13}}=\sqrt{\dfrac{25\cdot 13-81}{13}}$,

ÁREA$(ABC)=\dfrac{\sqrt{13}\sqrt{\dfrac{25\cdot 13-81}{13}}}{2}=\dfrac{\sqrt{25\cdot 13-81}}{2}$.

(3a) $(a,b)'=(0,1)+a\overrightarrow{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+b\overrightarrow{(-1,1)}$

$=\left(\frac{a-2b}{2},\frac{2+a+2b}{2}\right)$

$(a,b)'^{\star}=(-1,-\frac{1}{2})+\frac{a-2b}{2}\overrightarrow{(1,-\frac{1}{2})}+\frac{2+a+2b}{2}\overrightarrow{(1,\frac{1}{2})}$

$=\left(-\cancel{1}+\frac{a-\cancel{2b}}{2}+\frac{\cancel{2}+a+\cancel{2b}}{2},\ -\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{\cancel{a}-2b}{2}+\frac{1}{2}\frac{\cancel{2}+\cancel{a}+2b}{2}\right)$

$=\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2},\ -\frac{-2b}{4}+\frac{2b}{4}\right)=(a,b)$

$(a,b)^{\star}=(-1,-\frac{1}{2})+a\overrightarrow{(1,-\frac{1}{2})}+b\overrightarrow{(1,\frac{1}{2})}$

$=\left(-1+a+b,\frac{-1-a+b}{2}\right)$

$(a,b)^{\star\prime}=(0,1)+(-1+a+b)(\frac{1}{2},\frac{1}{2})+\frac{-1-a+b}{2}(-1,1)$

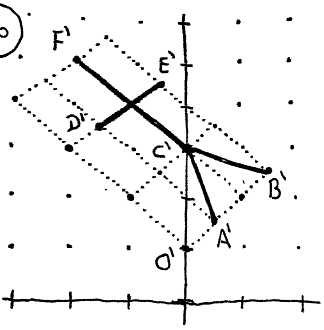
$=\left(\frac{-\cancel{1}+a+\cancel{b}}{2}-\frac{-\cancel{1}-a+\cancel{b}}{2},\ \cancel{1}+\frac{-\cancel{1}+\cancel{a}+b}{2}+\frac{-\cancel{1}-\cancel{a}+b}{2}\right)$

$=(a,b)$

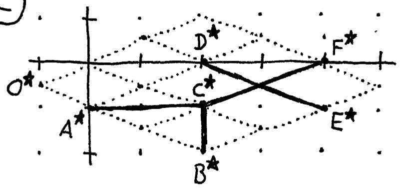
Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.2
Segunda Prova ("P2")
9/dezembro/2011

Gabarito (cont.)

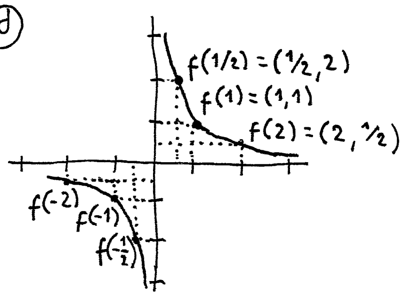
3b



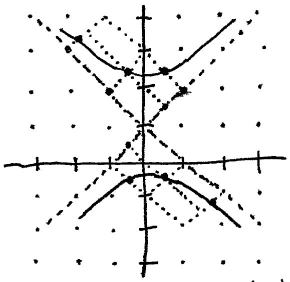
c



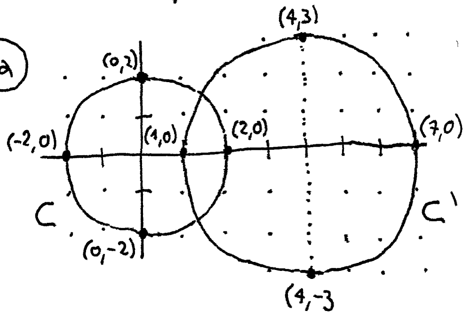
d



e



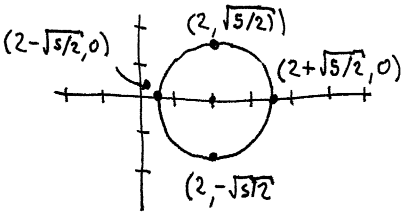
4a



b

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$
$$g(x,y) = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 9$$
$$h(x,y) = x^2 - 4x + 8 + y^2 - \frac{13}{2}$$
$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - \frac{13}{2} + 4$$
$$= (x-2)^2 + y^2 - \frac{5}{2}$$
$$= (x-2)^2 + y^2 - \sqrt{\frac{5}{2}}^2$$

Daí o raio de C'' é $\sqrt{\frac{5}{2}}$,
e aqui estão 4 pontos de C'':



Geometria Analítica
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR")
/Dezembro/2011

1) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2+b^2=1$, e sejam:

$O' = (0,0)$, $O^* = (0,0)$
$\vec{v'} = \overrightarrow{(a,b)}$, $\vec{v^*} = \overrightarrow{(a,-b)}$,
$\vec{w'} = \overrightarrow{(-b,a)}$, $\vec{w^*} = \overrightarrow{(b,a)}$.

Como sempre, as transformações "$'$" e "$*$" vão ser definidas desta forma: se $P=(x,y)$, então

$P' = O' + x\vec{v'} + y\vec{w'}$,
$P^* = O^* + x\vec{v^*} + y\vec{w^*}$.

a) Mostre que $(x,y)'^* = (x,y)$ e que $(x,y)^{*'} = (x,y)$. (0,5 pontos)

b) Mostre que se $P = (1a, 1b)$ então P^* está sobre o eixo horizontal. (0,5 pontos)

2) Sejam $A = (3,3,3)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(1,2,3)}$.

Lembre que as três "projeções na épura" de um ponto $P=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ são $P_{xy} = (x,y)$,
$P_{xz} = (x,-z)$,
$P_{zy} = (-z,y)$.

a) Encontre um vetor não-nulo da forma $\vec{w} = \overrightarrow{(a,b,0)}$ tal que $\vec{v} \perp \vec{w}$. Depois encontre um vetor $\vec{w'} = \overrightarrow{(a',b',0)}$ não-nulo, com $\vec{v} \perp \vec{w'}$, e tal que a' e b' sejam inteiros pequenos — mais precisamente, $a', b' \in S = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. (0,4 pontos)

b) Encontre um vetor $\vec{w''} = \overrightarrow{(a'',0,b'')}$, não nulo, com $\vec{v} \perp \vec{w''}$ e $a'', b'' \in S$. (0,3 pontos)

c) Encontre um vetor $\vec{w'''} = \overrightarrow{(0,a''',b''')}$, não-nulo, com $\vec{v} \perp \vec{w'''}$ e $a''', b''' \in S$. (0,3 pontos)

d) Sejam $B = A + \vec{w'}$, $C = A + \vec{w''}$, $D = A + \vec{w'''}$, $F = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{AD}$. Represente graficamente F_{ep}. (1,0 pontos)

3) Sejam $P = (0,0)$, $Q = (5,0)$,
C o círculo de raio 5 centrado em P,
C'' o círculo de raio $\sqrt{2^2+4^2}$ centrado em Q.
Sejam R e R'' os dois pontos de interseção dos círculos C e C''.

a) Diga as coordenadas de R e R'' e represente graficamente P, Q, C, C'', R, R''. (0,5 pontos)

b) Agora ~~esqueça o "R'" do item anterior~~ os sinais "$'$" e "$*$" vão passar a designar as transformações definidas na questão 1. Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ com $a^2+b^2=1$ tais que $Q' = (4,3)$. (0,5 pontos)

c) Encontre um ponto cuja distância a P seja 5 e cuja distância a Q' é $\sqrt{2^2+4^2}$. Explique — meio em português, meio algebricamente — como você obteve ele. Não esqueça de testar seus resultados! (3,0 pontos)

4) Sejam $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ a hipérbole canônica, e sejam $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; vamos de novo usar as transformações "$'$" e "$*$" definidas na questão 1.

Então:

$H' = \{P' \mid P \in H\}$
$= \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid Q^* \in H\}$,

e se você expandir a condição "$Q^* \in H$" você consegue expressar H' na forma

$$H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy = \delta\}$$

a) Encontre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. (2,0 pontos)

b) Encontre 6 pontos de H' e represente H' graficamente. (2,0 pontos)

GEOMETRIA ANALÍTICA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
PROVA SUPLEMENTAR ("VS")
16/DEZEMBRO/2011

(1) SEJA $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$.
MOSTRE COMO CALCULAR O PONTO DE r MAIS PRÓXIMO DA ORIGEM E A DISTÂNCIA DE r À ORIGEM.
2,0 PONTOS

(2) ENCONTRE DUAS RETAS QUE PASSAM PELO PONTO $(5,0)$ E CUJA DISTÂNCIA À ORIGEM É 1.
2,0 PONTOS

(3) SEJA C O CÍRCULO CENTRADO NO PONTO $(2,2)$ E DE RAIO 2, E SEJA $A=(5,2)$. ENCONTRE DUAS RETAS QUE PASSAM POR A E SÃO TANGENTES A C.
4,0 PONTOS

(4) SEJA $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ E $B=(4,3)$. ENCONTRE DUAS RETAS QUE PASSAM POR B E SÃO TANGENTES A C.
4,0 PONTOS