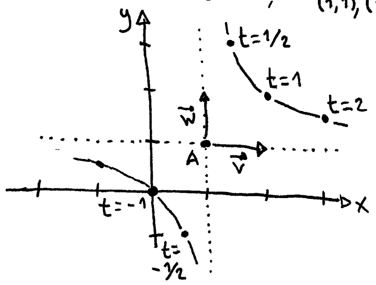
GEOMETRIA ANALÍTICA (GA)
PURO/UFF - 2012.2
P2 - 20/MARÇO/2013
PROF: EDUARDO OCHS

DEFINIÇÃO: UMA HIPÉRBOLE PARAMETRIZADA É UM CONJUNTO DA FORMA

$$H_{A,\vec{v},\vec{w}} = \{A + t\vec{v} + \tfrac{1}{t}\vec{w} \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\},$$

ONDE $A \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v}, \vec{w}$ SÃO VETORES DE $\mathbb{R}^2$. DIZEMOS QUE ELA É NÃO-DEGENERADA QUANDO $\vec{v}$ E $\vec{w}$ SÃO L.I.

A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMPLETA DE UMA HIPÉRBOLE PARAMETRIZADA INCLUI A HIPÉRBOLE EM SI, SUAS ASSÍNTOTAS E OS VALORES DE t ASSOCIADOS A ALGUNS DOS SEUS PONTOS. POR EXEMPLO, $H_{(1,1),\overrightarrow{(1,0)},\overrightarrow{(0,1)}}$ É:

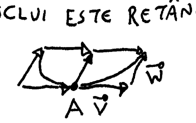


(OOPS, ESQUECI, A GENTE DESENHA A, $\vec{v}$ E $\vec{w}$ TAMBÉM).

UMA PARÁBOLA PARAMETRIZADA É UM CONJUNTO DA FORMA

$$P_{A,\vec{v},\vec{w}} = \{A + t\vec{v} + t^2\vec{w} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

E ELA É NÃO-DEGENERADA QUANDO $\vec{v}, \vec{w}$ SÃO L.I., E A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMPLETA DA PARÁBOLA $P_{A,\vec{v},\vec{w}}$ INCLUI ESTE RETÂNGULO:



UMA CÔNICA DADA POR UM POLINÔMIO É UM CONJUNTO DA FORMA

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\};$$

A DEFINIÇÃO DE "CÔNICA DEGENERADA" É MEIO ESQUISITA E VAMOS EVITÁ-LA POR ENQUANTO.

LEMBRE QUE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

E QUE $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

1) PROVE QUE SE $t \neq 0$, (0.5 PTS)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad \text{E}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ENTÃO $xy - 1 = 0$.

2) SEJAM H_1, H_2, H_3, H_4 AS HIPÉRBOLES PARAMETRIZADAS DEFINIDAS NA SEGUNDA FOLHA.

a) FAÇA A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMPLETA DE CADA UMA DELAS. (1.0 PTS)

b) QUAIS DELAS SÃO IGUAIS? QUANDO DUAS DELAS COINCIDEM O QUE ACONTECE COM OS SEUS "t"S? EXPLIQUE. (1.0 PTS)

c) REESCREVA H_1 NA FORMA $\{A + M\binom{t}{1/t} \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$, ONDE M É UMA MATRIZ 2x2. (0.5 PTS)

d) OBTENHA 6 PONTOS DE H_1 E UMA CÔNICA DADA POR UM POLINÔMIO, H_1', TAL QUE ESTES 6 PONTOS PERTENÇAM A H_1'. VERIFIQUE CUIDADOSAMENTE QUE ESTES PONTOS PERTENCEM A H_1'. (5.0 PTS)

DICA PRA 2d: A HIPÉRBOLE CANÔNICA, H_c, PODE SER ESCRITA DESTES DOIS JEITOS:

$$H_c = \{\tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 = 0\}$$
$$= \{\tbinom{t}{1/t} \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$$

SE VOCÊ DEFINIR UMA PARAMETRIZAÇÃO $\binom{x'}{y'} = A + M\binom{t}{1/t}$ E FIZER AS SUBSTITUIÇÕES ADEQUADAS DÁ PRA OBTER O POLINÔMIO QUE VOCÊ PRECISA. MAS TESTE TUDO.

3) SEJA C O CONE CANÔNICO EM $\mathbb{R}^3$, E $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ A FUNÇÃO DEFINIDA NA SEGUNDA FOLHA.

a) EXPRESSE A CÔNICA $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) \in C\}$ COMO UMA CÔNICA DADA POR UM POLINÔMIO, (1.0 PTS)

b) ENCONTRE 6 PONTOS DELA, (1.0 PTS)

c) PARAMETRIZE-A, (1.0 PTS)

d) DÊ SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMPLETA. (0.5 PTS)

$H_1 = H_{(2,0),\overrightarrow{(0,2)},\overrightarrow{(1,1)}}$

$H_2 = H_{(2,0),\overrightarrow{(0,2)},\overrightarrow{(2,2)}}$

$H_3 = H_{(2,0),\overrightarrow{(0,1)},\overrightarrow{(2,2)}}$

$H_4 = H_{(2,0),\overrightarrow{(0,-2)},\overrightarrow{(-1,-1)}}$

$F(x,y) = (x, y, x+y-1)$

$H_1 = H_{(3,2),\overrightarrow{(-2,0)},\overrightarrow{(1,1)}}$

$H_2 = H_{(3,2),\overrightarrow{(-2,0)},\overrightarrow{(2,2)}}$

$H_3 = H_{(3,2),(-1,0),\overrightarrow{(2,2)}}$

$H_4 = H_{(3,2),\overrightarrow{(2,0)},\overrightarrow{(-1,-1)}}$

$F(x,y) = (x, y, x-y+3)$

$H_1 = H_{(1,-2),\overrightarrow{(1,2)},\overrightarrow{(1,1)}}$

$H_2 = H_{(1,-2),\overrightarrow{(2,4)},\overrightarrow{(1,1)}}$

$H_3 = H_{(1,-2),\overrightarrow{(1,2)},\overrightarrow{(2,2)}}$

$H_4 = H_{(1,-2),\overrightarrow{(-1,-2)},\overrightarrow{(-1,-1)}}$

$F(x,y) = (x, y, y-x+2)$

$H_1 = H_{(1,0),\overrightarrow{(-2,1)},\overrightarrow{(1,1)}}$

$H_2 = H_{(1,0),\overrightarrow{(-2,1)},\overrightarrow{(2,2)}}$

$H_3 = H_{(1,0),\overrightarrow{(2,-1)},\overrightarrow{(-1,-1)}}$

$H_4 = H_{(1,0),\overrightarrow{(-4,2)},\overrightarrow{(1,1)}}$

$F(x,y) = (x, y, 5-x-y)$

$H_1 = H$

GEOMETRIA ANALÍTICA (GA)
PURO-UFF - 2012.2
P2- 20/MARÇO/2013
PROF: EDUARDO OCHS
<u>GABARITO</u>

1) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$

$= \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\left(\cancel{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}-\cancel{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}\right)$

$= \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$

PORTANTO $xy-1 = t(1/t)-1$
$= 1-1$
$= 0.$

2) VAMOS PEGAR O CASO:

$H_1 = H_{(1,0)\,\overrightarrow{(-2,1)}\,\overrightarrow{(1,1)}}$,

$H_2 = H_{(1,0)\,\overrightarrow{(-2,1)}\,\overrightarrow{(2,2)}}$,

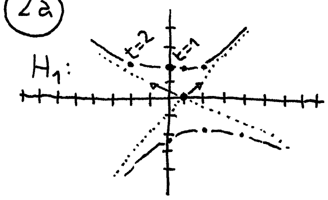
$H_3 = H_{(1,0)\,\overrightarrow{(2,-1)}\,\overrightarrow{(-1,-1)}}$

$H_4 = H_{(1,0)\,\overrightarrow{(-4,2)}\,\overrightarrow{(1,1)}}$

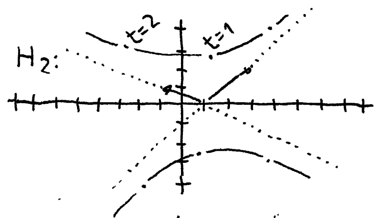
(FIZ VÁRIAS "SEGUNDAS FOLHAS" DIFERENTES, E UMA DELAS TINHA ESTES H_1, H_2, H_3, H_4).

2a)

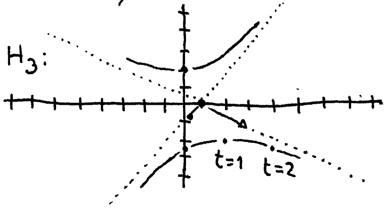
H_1:



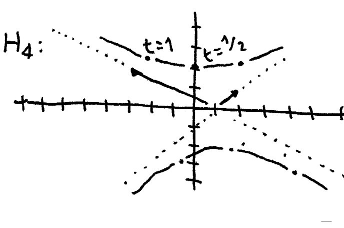
H_2:



H_3:



H_4:



2b) $H_1 = H_3 \neq H_2 = H_4$.
H_1 E H_3 SÃO REPARAMETRIZAÇÕES UMA DA OUTRA, E QUANDO PASSAMOS DE H_1 PRA H_3 O t É MULTIPLICADO POR -1.
H_2 E H_4 TAMBÉM SÃO REPARAMETRIZAÇÕES UMA DA OUTRA, E QUANDO PASSAMOS DE UMA PRA OUTRA O t É DIVIDIDO POR 2.

2c) $H_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R},\ t\neq 0\right\}$

2d) VAMOS DEFINIR:

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}.$

ENTÃO

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'-1\\y'\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}((x'-1)-y')\\ -\frac{1}{3}(1-x'-2y')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-x'+y'+1}{3}\\ \frac{+x'+2y'-1}{3}\end{pmatrix}$

E O POLINÔMIO

$xy-1=0$

É EQUIVALENTE A:

$\left(\frac{-x'+y'+1}{3}\right)\left(\frac{+x'+2y'-1}{3}\right)-1=0$

$(-x'+y'+1)(+x'+2y'-1)-9=0$

$\|$

$\cancel{-3x'^2+x'y'+2y'^2+4x'+y'-10}$

$-x'^2-x'y'+2y'^2+2x'+y'-10$

TESTANDO...

t	x	y	x'	y'	$(-x'+y'+1)$	$(x+2y-1)$
1	1	1	0	2	3	3
2	2	1/2	-2.5	2.5	6	1.5
1/2	1/2	2	2	2.5	1.5	6
-1	-1	-1	2	-2	-3	-3
-2	-2	-1/2	4.5	-2.5	-6	-1.5
-1/2	-1/2	-2	0	-2.5	-1.5	-6

3) VAMOS PEGAR O CASO $F(x,y) = (x, y, 5-x-y)$.
COMO $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2+y^2\}$,

a) $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y,5-x-y)\in C\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (5-x-y)^2-x^2-y^2=0\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2xy-10x-10y+25=0\}$

c) $E = \{(5,5)+t\overrightarrow{(5,0)}+\frac{1}{t}\overrightarrow{(0,2.5)} \mid t\in\mathbb{R},\ t\neq 0\}$

d)