Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

4ª Lista de Exercícios – 1/2011

1. Identifique geometricamente os seguintes conjuntos:

   a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 1\}$
   b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 1 \text{ e } y = 0\}$
   c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y\}$
   d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y \text{ ou } z = 1\}$
   e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 + 2z = 3\}$
   f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 2z + 1)(3x - z - 2) = 0\}$
   g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$
   h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy = 1, x > 0, y > 0\}$
   i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$

2. Determine a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ como o conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Esboçe essa interseção.

3. Prove que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI, então $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{v}$ e $\overrightarrow{3v}$ também são LI, o mesmo sucedendo com $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$.

4. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ LI. Dado $\vec{a}$ qualquer, sabemos que existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. Prove que $\vec{u} + \vec{a}, \vec{v} + \vec{a}, \vec{w} + \vec{a}$ são LI se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

5. Prove que $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$, $2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$ e $\vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}$ são LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

6. Seja T a superfície formada pelos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao plano $z = -1$ seja igual à distância ao ponto $(0, 0, 1)$. Encontre a equação dessa superfície. Seja S a esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1, ou seja, o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Mostre que a interseção $S \cap T$ é uma circunferência contida num plano horizontal, com centro no eixo OZ.

7. Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo norte da esfera unitária $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Note que $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é um ponto de S. Encontre as equações paramétricas da reta que passa por N e P. Encontre o ponto P' interseção desta reta com o plano OXY. Faça o mesmo para um ponto qualquer $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ diferente de N, ou seja, encontre $P' = (x', y', 0)$ o ponto em que a reta por N e P intersecta o plano OXY.