Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

5ª Lista de Exercícios – 1/2011

1. Determinar se os vetores abaixo são LI ou LD:

   a) $\vec{u} = (1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 4, 1)$
   b) $\vec{u} = (2, 4, 3)$ e $\vec{v} = \left(3, 6, \frac{9}{2}\right)$
   c) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 4, 1)$ e $\vec{w} = (3, 6, 2)$
   d) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 4, 1)$ e $\vec{w} = (2, 4, 5)$

2. Mostre que os veotres $\vec{u} = (1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 3)$ são LI. Encontre um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formem uma base.

3. Determine se o ponto D pertence ao plano que contém os pontos A, B e C onde:

   a) $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (2, -\sqrt{2}, 2)$.
   b) $A = (0, 1, -1)$, $B = (3, 1, 1)$, $C = (0, 1, -1)$, $D = (2, 1, 2)$.
   c) $A = (2, 2, 0)$, $B = (0, 0, -2)$, $C = (2, 3, 0)$, $D = (1, -1, 0)$.
   d) $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (3, 3, 0)$, $D = (3, ?3, 3)$.

4. Determine as coordenadas do vetor $\vec{w} = (2, 1, 0)$ em relação à base $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, onde:

   a) $\vec{v_1} = (1, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{v_3} = (1, 0, 1)$.
   b) $\vec{v_1} = (1, 1, 1)$, $\vec{v_2} = (1, 1, -1)$, $\vec{v_3} = (1, -1, 1)$.
   c) $\vec{v_1} = (0, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (0, -1, 1)$, $\vec{v_3} = (0, 0, 1)$.

5. Determine se a reta ℓ intersecta o plano π. Se a resposta for afirmativa, ache o ponto de interseção.

   a) ℓ é a reta paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e que passa pelo ponto $A = (0, 1, 0)$. π é o plano que contém os pontos $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ e $D = (1, 2, -2)$.
   b) ℓ é a reta que contém os pontos $A = (0, -1, -1)$ e B $= (1, 2, 0)$ e π é o plano que passa pelos pontos $C = (1, 0, 0)$ e $D = (2, 0, 0)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)$.
   c) ℓ é o eixo OZ do sistema de coordenadas e π é o plano que passa pelo ponto $A = (0, 2, 0)$ e é gerado pelos vetores $\vec{v} = (2, 4, 2)$ e $\vec{w} = (1, 2, -2)$.

6. Estudando Geometria Analítica em uma noite de sábado, Carolina resolveu vários exercícios que pediam equações de reta. Relacionamos a seguir as respostas dela e as do livro, respectivamente. Quais exercícios Carol acertou?

a) $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad r : \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + \frac{1}{2}t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - t \\ y = -\frac{1}{3} + 2t \\ z = \frac{2}{3} - t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2}t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad r : \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

7. Os vértices de um triângulo são $A = (2, 1, 3)$, $B = (4, -1, 2)$ e $C = (6, 2, 5)$. Determine as coordenadas o pé da altura relativa ao vértice A.

8. Escreva as equações paramétrica do plano π, utilizando as informações dadas em cada caso.

   a) π contém $A = (1, 2, 0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{v} = (2, 3, -1)$.
   b) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$.
   c) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.
   d) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

9. Em uma manhã ensolarada de domingo em Rio das Ostras, Marcelo, antes de ir à Lagoa do Iriry, resolveu dois exercícios que pediam equações cartesianas de planos. Em cada um dos item seguintes, a primeira equação é a resposta que Marcelo obteve, e a segunda, a resposta do livro. Quais exercícios ele acertou?

   a) $x - 3y + 2z + 1 = 0$; $2x - 6y + 4z + 4 = 0$.
   b) $x - \frac{y}{2} + 2z - 1 = 0$; $-2x + y - 4z + 2 = 0$.

10. Obtenha as equações cartesianas dos planos do exercício 8.

11. Duas partículas realizam movimentos descritos pelas equações $P = (0, 0, 0) + t(1, 2, 4)$ e $Q = (1, 0, 2) + t(-1, -1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. As trajetórias são concorrentes? Pode haver colisão das partículas em algum instante?

12. A altura e a mediana relativas ao vértice B do triângulo ΔABC estão contidas, respectivamente, nas retas $r : (x, y, z) = (-6, 0, 3) + t(3, 2, 0), t \in \mathbb{R}$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 3) + t(3, -2, 0), t \in \mathbb{R}$. Sendo $C = (4, -1, 3)$, determine A e B.

13. Dadas as retas $r : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, 0, 0), t \in \mathbb{R}$ e $s : (x, y, z) = (-1, 2, -7) + t(2, 1, 3), t \in \mathbb{R}$, obtenha a equação vetorial da reta m, concorrente com r e s e paralela a $\overrightarrow{u} = (1, -5, -1)$.

14. Obtenha uma equação vetorial da reta quem contém $P = (1, 1, 0)$, e é paralela ou contida no plano $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$ e é concorrente com a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(-1, 0, 1), t \in \mathbb{R}$.

15. Existe uma reta paralela a $\pi : (x, y, z) = (0, 0,) + t(1, -1, -1) + s(3, 0, -1), s, t \in \mathbb{R}$, que contenha $P = (2, 2, 1)$ e seja concorrente com $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(2, 1, 0), t \in \mathbb{R}$?

16. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos com uma extremidade em $r : (x, y, z) = (1, 2, 2) + t(0, 1, 1), t \in \mathbb{R}$ e outra em $s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + s(1, 0, 1), s \in \mathbb{R}$ e descreva-o geometricamente.

17. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos médios dos sgmentos com uma extremidade em $\pi_1 : 2x - 3y + 3z - 4 = 0$ e outra em $\pi_2 : x + y - z + 2 = 0$, e descreva-o geometricamente.