

Cálculo Diferencial e Integral I  
 PURO-UFF - 2009.1  
 Turma: A1/RCT00016  
 Professor: Eduardo Ochs  
 Primeira prova - 19/maio/2009

(1) (Total: 3.5 pontos). **Fato:** um polinômio de grau 2 tem no máximo uma corcova, um polinômio de grau 3 no máximo 2, um polinômio de grau 4 no máximo 3, e assim por diante (veja a figura abaixo).

Seja:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2$$

- (0.5 pontos) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(-1, f(-1))$ .
- (1.5 pontos) Encontre todos os pontos do gráfico de  $f$  nos quais a reta tangente é horizontal.
- (0.5 pontos) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- (1.0 ponto) Trace o gráfico da função  $f$ .

(2) (Total: 2.5 pontos). Seja  $f(x) = |x^3|$ .

- (0.1 ponto) Para que valores de  $x$  temos  $f(x) = x^3$ ?
- (0.1 ponto) Para que valores de  $x$  temos  $f(x) = -x^3$ ?
- (0.3 pontos) Encontre uma função  $g$ , definida por casos (sem usar “|”!), tal que  $g$  seja igual a  $f$ .

$$g(x) = \begin{cases} \text{---} & \text{quando ---} \\ \text{---} & \text{quando ---} \end{cases}$$

**Fato:** se duas funções deriváveis,  $g$  e  $h$ , coincidem num intervalo  $(a, b)$ , então as suas derivadas coincidem no intervalo  $(a, b)$ .

- (2.0 pontos) Calcule a derivada de  $f$  e trace o seu gráfico.

(3) (Total: 2.0 pontos). Calcule:

- a)  $\frac{d}{d\theta} \operatorname{sen}(2 \operatorname{sen} 3\theta)$
- b)  $\frac{d}{dx} \frac{(x-1)^4(x-2)^5}{x}$
- c)  $\left(\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 2x \cos 2x)\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20}-1}{x^{10}-1}$

(4) (Total: 2.0 pontos). Considere a curva  $y = \sqrt{x}$ .

a) (0.5 ponto) Calcule as equações das retas tangentes a esta curva em  $x = 1$  e em  $x = 4$ , e trace um gráfico com a curva e estas duas retas tangentes.

b) (1.5 pontos) Quando  $\epsilon$  é pequeno,  $f(x_0 + \epsilon) \approx f(x_0) + f'(x_0)\epsilon$ . Use as duas retas tangentes para obter duas aproximações para  $\sqrt{3.5}$  e compare os valores obtidos com o valor real:  $\sqrt{3.5} = 1.8708\dots$

Justifique cada uma das suas respostas.

Boa prova!

Algumas fórmulas:

- (0)  $\frac{d}{dx}(af(x)) = af'(x)$
- (1)  $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
- (2)  $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (3)  $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$
- (4)  $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- (5)  $\frac{d}{dx} 1 = 0$
- (6)  $\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$
- (7)  $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
- (8)  $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
- (9)  $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- (10)  $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$