Cálculo Diferencial e Integral I
PURO-UFF - 2009.1
Turma: A1/RCT00016
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 29/junho/2009

(1) (Total: 4.0 pontos). Seja $f : [2, 6] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(2) = 3$ e $f(6) = 5$. Use o Teorema de Weierstrass e o Teorema do Valor Intermediário pra mostrar que a imagem de f é um intervalo fechado.

(2) (Total: 3.0 pontos). Use o Teorema do Anulamento para mostrar que $f(x) = \cos x - \frac{x}{10}$ tem pelo menos duas raízes em $[0, 2\pi]$.

(3) (Total: 3.0 pontos). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada é sempre positiva e tal que $f(0) = 1$ e $f(4) = 2$. Use o TVM para mostrar que $f(2) \neq 2$.

(4) (Total: 1.0 pontos *a serem somados na nota da P1*, pra compensar a questão sobre limites no infinito). Seja $f(x) = e^{x^2-2x}$. Encontre todos os pontos nos quais o gráfico de f é horizontal, e depois diga em que intervalos a f é crescente e em que intervalos ela é decrescente.

Escreva as suas respostas *com todos os detalhes possíveis*!!!!!
Boa prova!

Teoremas:

Teorema do anulamento: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)$ e $f(b)$ são diferentes de 0 e têm sinais opostos então f atinge 0 em algum ponto do intervalo aberto (a, b) — isto é, existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema do valor intermediário: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e y está entre $f(a)$ e $f(b)$ — isto é, $y \in [f(a), f(b)]$ (se $f(a) \leq f(b)$) ou $y \in [f(b), f(a)]$ (se $f(b) \leq f(a)$) — então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$.

Teorema da limitação: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então a sua imagem é limitada — isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in [a, b]$ vale $m \leq f(x) \leq M$.

Teorema de Weierstrass: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f atinge o seu valor mínimo e o seu valor máximo em $[a, b]$ — isto é, existem $c, d \in [a, b]$ tais que para todo $x \in [a, b]$ vale $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Teorema de Rolle: Se $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e além disso $f(a) = f(b) = 0$ então existe x em (a, b) tal que $f'(x) = 0$.

Teorema do valor médio: Se $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) então existe x em (a, b) tal que $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Importante: quando você for usar algum dos teoremas acima dê todos os detalhes sobre o que você está fazendo — diga quem é a função f, quem são os pontos a e b, explique por que a f é contínua e/ou derivável no intervalo, etc...

Algumas fórmulas:
(0) $\frac{d}{dx}(af(x)) = af'(x)$
(1) $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
(2) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(3) $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$
(4) $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
(5) $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$
(6) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

(1) (Total: 4.0 pontos). Seja $f : [2,6] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(2) = 3$ e $f(6) = 5$. Use o Teorema de Weierstrass e o Teorema do Valor Intermediário pra mostrar que a imagem de f é um intervalo fechado.

Gabarito:

Pelo teorema de Weierstrass existem $c, d \in [2,6]$ tais que $\forall x \in [2,6].\, f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Pelo teorema de Weierstrass se $y > f(d)$ então y não tem preimagem em $[2,6]$.

Pelo TVI se $y \in [f(c), f(d)]$ então y tem preimagem entre c e d, e portanto tem preimagem em $[2,6]$.

Pelo teorema de Weierstrass se $y < f(c)$ então y não tem preimagem em $[2,6]$.

(2) (Total: 3.0 pontos). Use o Teorema do Anulamento para mostrar que $f(x) = \cos x - \frac{x}{10}$ tem pelo menos duas raízes em $[0, 2\pi]$.

Gabarito:

$f(0) = 1$, $f(\pi) = -1 - \frac{\pi}{10} < 0$, $f(2\pi) = 1 - \frac{2\pi}{10} \approx 1 - 0.628... > 0$. Usando o teorema do anulamento em $[0, \pi]$ encontramos uma raiz em $(0, \pi)$, e usando de novo em $[\pi, 2\pi]$ encontramos outra em $(\pi, 2\pi)$.

(3) (Total: 3.0 pontos). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada é sempre positiva e tal que $f(0) = 1$ e $f(4) = 2$. Use o TVM para mostrar que $f(2) \neq 2$.

Gabarito:

Se $f(2) = 2$ e aplicamos o TVM ao intervalo $[2,4]$ encontramos um $x \in (2,4)$ com $f'(x) = 0$; mas isto contradiz a hipótese de que a derivada é sempre positiva, então $f(2) \neq 2$.

(4) (Total: 1.0 pontos *a serem somados na nota da P1*, pra compensar a questão sobre limites no infinito). Seja $f(x) = e^{x^2 - 2x}$. Encontre todos os pontos nos quais o gráfico de f é horizontal, e depois diga em que intervalos a f é crescente e em que intervalos ela é decrescente.

Gabarito:

$f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}$, que tem o mesmo sinal que $2x - 2$ e $x - 1$; isto é negativo em $x < 1$, 0 em $x = 1$, positivo em $x > 1$. Daí $f(x)$ tem tangente horizontal só em $x = 1$, é decrescente em $x < 1$ e crescente em $x > 1$.