Cálculo Diferencial e Integral I
PURO-UFF - 2009.1
Turma: A1/RCT00016
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição 1 - 01/julho/2009

(1) (Total: 0.5 pontos). O que está errado com o seguinte uso da regra de l'Hôpital?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x+2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Diga qual é o erro e encontre o limite correto.

(2) (Total: 4.0 pontos). Seja $f_m(x) = x^3 - 3x + m$.

a) (0.5 pts) Calcule $f_0(10)$, $f_0(100)$, $f_0(1000)$. Baseando-se nestes valores diga qual deve ser o valor do limite $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)$. Faça o mesmo para $f_0(-10)$, $f_0(-100)$, $f_0(-1000)$ e $\lim_{x\to-\infty} f_0(x)$.

b) (0.5 pts) Encontre todos pontos onde a reta tangente ao gráfico de $f_0(x)$ é horizontal.

c) (0.5 pts) Trace o gráfico de $f_0(x)$.

d) (0.5 pts) Trace os gráficos de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_{-1}(x)$. Quantas raízes cada uma destas funções têm no intervalo $[0,1]$?

e) (2.0 pts) Use o TVM para mostrar formalmente que nenhuma das funções $f_m(x)$ pode ter mais de uma raiz no intervalo $[0,1]$.

(3) (Total: 4.0 pontos). Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = a+bx+cx^2+dx^3$.

a) (0.5 pts) Calcule $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f''''(0)$.

b) (1.0 pts) Calcule $g(0), g'(0), g''(0), g'''(0), g''''(0)$.

c) (1.0 pts) Encontre a, b, c, d que façam com que $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $\ldots$, $f'''(0) = g'''(0)$. Quando a, b, c, d têm estes valores quem é a função $g(x)$?

d) (1.5 pts) Mostre que as funções $g(x)$ e $g'(x)$ não têm nenhuma raiz no intervalo $[0,\infty]$.

(4) (Total: 1.5 pontos). Calcule $f'(x)$ para:

a) (0.5 pts) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) (1.0 pts) $f(x) = (((x^2+x)^3+x)^4+x)^5$

Escreva as suas respostas *com todos os detalhes possíveis*!!!!!

Boa prova!

Teoremas:

Teorema do anulamento: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)$ e $f(b)$ são diferentes de 0 e têm sinais opostos então f atinge 0 em algum ponto do intervalo aberto (a, b) — isto é, existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema do valor intermediário: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e y está entre $f(a)$ e $f(b)$ — isto é, $y \in [f(a), f(b)]$ (se $f(a) \leq f(b)$) ou $y \in [f(b), f(a)]$ (se $f(b) \leq f(a)$) — então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$.

Teorema da limitação: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então a sua imagem é limitada — isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in [a, b]$ vale $m \leq f(x) \leq M$.

Teorema de Weierstrass: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f atinge o seu valor mínimo e o seu valor máximo em $[a, b]$ — isto é, existem $c, d \in [a, b]$ tais que para todo $x \in [a, b]$ vale $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Teorema de Rolle: Se $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e além disso $f(a) = f(b) = 0$ então existe x em (a, b) tal que $f'(x) = 0$.

Teorema do valor médio: Se $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) então existe x em (a, b) tal que $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Importante: quando você for usar algum dos teoremas acima dê todos os detalhes sobre o que você está fazendo — diga quem é a função f, quem são os pontos a e b, explique por que a f é contínua e/ou derivável no intervalo, etc...

Algumas fórmulas:
(0) $\frac{d}{dx}(af(x)) = af'(x)$
(1) $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
(2) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(3) $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$
(4) $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
(5) $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$
(6) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

(1) (Total: 0.5 pontos). O que está errado com o seguinte uso da regra de l'Hôpital?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x+2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Diga qual é o erro e encontre o limite correto.

Gabarito:

$\lim_{x\to 1} x^3+x+2 = 4$ e $\lim_{x\to 1} x^2-3x+2 = 0$; não podemos aplicar l'Hôpital, e o limite é ∞.

(2) (Total: 4.0 pontos). Seja $f_m(x) = x^3 - 3x + m$.

a) (0.5 pts) Calcule $f_0(10)$, $f_0(100)$, $f_0(1000)$. Baseando-se nestes valores diga qual deve ser o valor do limite $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)$. Faça o mesmo para $f_0(-10)$, $f_0(-100)$, $f_0(-1000)$ e $\lim_{x\to-\infty} f_0(x)$.

b) (0.5 pts) Encontre todos pontos onde a reta tangente ao gráfico de $f_0(x)$ é horizontal.

c) (0.5 pts) Trace o gráfico de $f_0(x)$.

d) (0.5 pts) Trace os gráficos de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_{-1}(x)$. Quantas raízes cada uma destas funções têm no intervalo $[0,1]$?

e) (2.0 pts) Use o TVM para mostrar formalmente que nenhuma das funções $f_m(x)$ pode ter mais de uma raiz no intervalo $[0,1]$.

Gabarito:

a) $f_0(10) = 970$,
$f_0(100) = 999700$,
$f_0(1000) = 999997000$,
$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$;
$f_0(-10) = -970$,
$f_0(-100) = -999700$,
$f_0(-1000) = -999997000$,
$\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$.

b) $f'_m(x) = 3x^2 - 3$, que zera exatamente em $x = \pm 1$.

c) Ele passa por (-2,-2), (-1,2), (0,0), (1,-2), (2,2).

d) $f_1(x) \mapsto 1$, $f_2(x) \mapsto 1$, $f_3(x) \mapsto 0$, $f_{-1}(x) \mapsto 1$.

e) Se as raízes são $a, b \in [0,1]$ com $f(a) = f(b) = 0$ e $a < b$ então pelo teorema de Rolle existe em $c \in (a,b) \subset (0,1)$ com $f'(c) = 0$, mas f' só zera em -1 e 1.

(3) (Total: 4.0 pontos). Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

a) (0.5 pts) Calcule $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f''''(0)$.

b) (1.0 pts) Calcule $g(0), g'(0), g''(0), g'''(0), g''''(0)$.

c) (1.0 pts) Encontre a, b, c, d que façam com que $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, ..., $f'''(0) = g'''(0)$. Quando a, b, c, d têm estes valores quem é a função $g(x)$?

d) (1.5 pts) Mostre que as funções $g(x)$ e $g'(x)$ não têm nenhuma raiz no intervalo $[0, \infty]$.

Gabarito:

a) $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f''''(0) = 1$.

b) $g(0) = a$, $g'(0) = b$, $g''(0) = 2c$, $g'''(0) = 6d$, $g''''(0) = 0$.

c) $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{6}$, $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

d) $g(x)$ e $g'(x)$ são somas de monômios que são não-descrescentes em $[0, \infty)$, e são crescentes. Como $g(0) = g'(0) = 1$ elas não podem cair e ter raízes positivas.

(4) (Total: 1.5 pontos). Calcule $f'(x)$ para:

a) (0.5 pts) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) (1.0 pts) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$

Gabarito:

a)
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(1 - x^2)' \\ & = & \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(2x) \\ & = & (1 - x^2)^{-1/2}x \\ & = & x/\sqrt{(1 - x^2)} \end{array}$$

b) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5 = (g(x) + x)^5$

$g(x) = ((x^2 + x)^3 + x)^4 = (h(x) + x)^4$

$h(x) = (x^2 + x)^3$

$h'(x) = 3(x^2 + x)(2x + 1)$

$g'(x) = 4(h(x) + x)^3(h'(x) + 1)$

$f'(x) = 5(g(x) + x)^4(g'(x) + 1)$

$f'(x) = 5(g(x) + x)^4(g'(x) + 1)$

$f'(x) = 5(((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^4(4(h(x) + x)^3(h'(x) + 1) + 1)$

$f'(x) = 5(((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^4(4((x^2 + x)^3 + x)^3(3(x^2 + x)(2x + 1) + 1) + 1)$