Cálculo Diferencial e Integral I
PURO-UFF - 2009.1
Turma: A1/RCT00016
Professor: Eduardo Ochs
Prova suplementar (VS) - 08/julho/2009

(1) (Total: 2.5 pontos). Calcule:
a) (1.0 pts) $\mathrm{sen}(x^5 + 6x^2)e^{2x}$
b) (1.0 pts) $\ln \sqrt{x^2 - 1}$
c) (0.5 pts) $\sqrt[3]{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3}$

(2) (Total: 4.5 pontos). Seja $f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$.
a) (0.5 pts) Qual é a relação entre $f(x)$ e $f(-x)$?
b) (0.5 pts) Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. (Dica: você pode usar valores como $100, 1000, \ldots$ para x e calcular aproximadamente o valor do numerador e do denominador).
c) (1.0 pts) Qual é comportamento da $f(x)$ quando x tende a 3? (Dica: você pode fazer a mesma coisa que no item anterior, mas agora começando com $x = 3 + 0.001$ e $x = 3 - 0.001$).
d) (1.0 pts) Descubra todos os pontos nos quais o gráfico da $f(x)$ é horizontal.
e) (1.5 pts) Trace o gráfico de $f(x)$.

(3) (Total: 1.5 pontos). Seja $f(x) = x^2$. Encontre um valor para a e um para b, tais que $a < b$ e para os quais $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2$; depois encontre $c, d \in (a, b)$ tais que $f'(c) = 2$ e $f'(d) \neq 2$.

(4) (Total: 1.5 pontos). O gráfico de uma função derivável $f(x)$ tem concavidade para cima — como x^2 — onde $f''(x) > 0$, e concavidade para baixo — como $-x^2$ — onde $f''(x) < 0$; os pontos onde a concavidade muda de direção são chamados de *pontos de inflexão*, e neles $f''(0) = 0$. Use esta idéia para fazer um gráfico da função $f(x) = x^4 - 6x^2$ no qual estejam representados os pontos de inflexão, os pontos com tangente horizontal, as raízes de $f(x)$, o comportamento no infinito, etc. Dica: $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{6} \approx 2.45$.

Algumas fórmulas:
(0) $\frac{d}{dx}(af(x)) = af'(x)$
(1) $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
(2) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(3) $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$
(4) $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
(5) $\frac{d}{dx}1 = 0$
(6) $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$
(7) $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
(8) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
(9) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
(10) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Justifique cuidadosamente cada uma
das suas respostas, e não erre! 8-)
Boa prova!

Mini-gabarito:

1a) (1.0 pts) $\cos(x^5+6x^2)(5x^4+12x)e2x + 2\operatorname{sen}(x^5+6x^2)e^{2x}$

b) (1.0 pts) $\frac{\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$

c) (0.5 pts) $\frac{1}{3}(x^6-2x^5+3x^4-4x^3)^{-2/3}(6x^5-10x^4+12x^3-12x^2)$

2a) (0.5 pts) f é ímpar: $f(x) = -f(-x)$.

b) (0.5 pts) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) (1.0 pts) $\lim_{x\to 3^+} = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-} = +\infty$

d) (1.0 pts) O gráfico nunca é horizontal.

e) (1.5 pts) O gráfico tem assíntotas verticais — como $1/x$ – em -3 e 3, e ele corta o eixo horizontal — descendo — em $x=0$, e ele tende para 0 em $\pm\infty$.

3) (1.5 pts) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$; $2 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b+a$; podemos tomar por exemplo $a=-1$, $b=3$, $c=1$, $d=2$.

4) (1.5 pts) $f(x) = x^4-6x^2 = x^2(x^2-6)$, $f'(x) = 4x^3-12x = 4x(x^2-3)$, $f''(x) = 12x^2-12 = 12(x-1)$; o único ponto de inflexão é $(1,-2)$, os pontos com tangente horizontal são $(-\sqrt{3},-9)$, $(\sqrt{3},-9)$, os zeros são em $x=0$ (duplo) e $x=\pm\sqrt{6}$.