Cálculo Diferencial e Integral II
PURO-UFF - 2009.1
Turma: A1/RCT00017
Professor: Eduardo Ochs
Gabarito (parcial?) da primeira prova
Versão: 2009jun05

1a) (1.5 pontos):

$$\begin{array}{rcl}
\text{Área}(A) &=& \int_{-4}^{-2} f(x)dx \\
\text{Área}(B) &=& \int_{-3}^{-0} g(x)dx - \int_{-3}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^{0} h(x)dx \\
\text{Área}(C) &=& \int_{-2}^{-0} h(x)dx + \int_{0}^{2} k(x)dx \\
\text{Área}(D) &=& \int_{0}^{4} p(x)dx - \int_{0}^{4} k(x)dx
\end{array}$$

1b) (1.0 pontos):

$$\begin{array}{rclrcl}
f(x) &=& 1-(x+3)^2 & \int f(x)dx &=& x-\frac{1}{3}(x+3)^3 \\
g(x) &=& 2\sqrt{x+4}-1 & \int g(x)dx &=& \frac{4}{3}(x+4)^{3/2}-x \\
h(x) &=& ((x+4)/2)^2-1 & \int h(x)dx &=& \frac{1}{12}(x+4)^3-x \\
k(x) &=& ((4-x)/2)^2-1 & \int k(x)dx &=& -\frac{1}{12}(4-x)^3-x \\
p(x) &=& 2\sqrt{4-x}-1 & \int p(x)dx &=& -\frac{4}{3}(4-x)^{3/2}-x
\end{array}$$

$\text{Área}(B) = 3$
$\text{Área}(D) = 16/3$

2a) (0.5 pontos)

$$\begin{array}{rcl}
\int x^2 \ln x\, dx &=& (\frac{1}{3}x^3)(\ln x) - \int (\frac{1}{3}x^3)\frac{1}{x}\, dx \\
&=& (\frac{1}{3}x^3)(\ln x) - \frac{1}{3}\int x^2\, dx \\
&=& (\frac{1}{3}x^3)(\ln x) - \frac{1}{9}x^3\, dx
\end{array}$$

2b) (1.0 pontos)

Eu fiz uma conta errada quando bolei esta questão... Temos primitivas para $\int(\operatorname{sen} x)x^n\,dx$ e para $\int x^n \ln x\,dx$, mas não para $\int(\operatorname{sen} x)\ln x\,dx$ — quando tentamos calcular $\int(\operatorname{sen} x)\ln x\,dx$ por integração por partes caímos em $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, que não tem uma primitiva que possa ser expressa por funções elementares... Veja `http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_Galois_theory` para detalhes.

Vou dobrar o valor desta questão, e dar até 2.0 pontos pra quem tiver feito várias boas tentativas incompletas.

3a) (0.5 pontos)

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1}{(x-2)(x-3)} dx &= \int \tfrac{a}{x-2} + \tfrac{b}{x-3}\, dx \\
&= \int \tfrac{a(x-3)+b(x-2)}{(x-2)(x-3)}\, dx \\
&= \int \tfrac{-(x-3)+(x-2)}{(x-2)(x-3)}\, dx \\
&= \int \tfrac{-1}{x-2} + \tfrac{1}{x-3}\, dx \\
&= -\ln|x-2| + \ln|x-3|
\end{aligned}$$

3b) (0.5 pontos)

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{x+1}{(x-1)^2} dx &= \int \tfrac{a}{(x-1)} + \tfrac{b}{(x-1)^2}\, dx \\
&= \int \tfrac{a(x-1)+b}{(x-1)^2}\, dx \\
&= \int \tfrac{(x-1)+2}{(x-1)^2}\, dx \\
&= \int \tfrac{1}{(x-1)} + \tfrac{2}{(x-1)^2}\, dx \\
&= \ln|x-1| - \tfrac{2}{x-1}
\end{aligned}$$

4a) (0.8 pontos)

Se $u = x - 10$ então $x = u + 10$ e $x^2 - 20x + 1000 = (u+10)^2 - 20(u+10) + 1000 = (u^2 + 20u + 100) - (20u + 200) + 1000 = u^2 + 900$.

$$\int_{x=2}^{x=3} \tfrac{x}{\sqrt{x^2-20x+1000}}\, dx = \int_{u=2-10}^{u=3-10} \tfrac{u+10}{\sqrt{u^2+900}}\, du$$

4b) (0.2 pontos)

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{x^2+1}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx &= \int \tfrac{x^2+1}{x\sqrt{4(1-\frac{1}{4}x^2)}}\, dx \\
&= \int \tfrac{x^2+1}{2x\sqrt{(1-\frac{1}{4}x^2)}}\, dx
\end{aligned}$$

4c) (0.5 pontos)

Se $u = 3x$ então $x = \frac{1}{3}u$ e $dx = \frac{1}{3}\, du$. Aí:

$$\int_{x=1/9}^{x=1/3} \tfrac{\sqrt{1-9x^2}}{3-x}\, dx = \int_{u=1/3}^{u=1} \tfrac{\sqrt{1-u^2}}{3-\frac{1}{3}u}\, \tfrac{1}{3} du$$

4d) (1.0 pontos)

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{t^2}{(\sqrt{1+t^2})^5}\, dt &= \int \tfrac{t^2}{z^5} z^2\, d\theta \\
&= \int \tfrac{t^2}{z^3}\, d\theta \\
&= \int t^2 z^{-3}\, d\theta \\
&= \int \tfrac{s^2}{c^2} c^3\, d\theta \\
&= \int s^2 c\, d\theta \\
&= \int s^2\, ds \\
&= \tfrac{1}{3} s^3
\end{aligned}$$

4e) (1.0 pontos)

$$\begin{aligned}
\int_{t=a}^{t=b} \frac{t^2}{(\sqrt{1+t^2})^5}\,dt &= \int_{\theta=\arctan a}^{\theta=\arctan b} \frac{t^2}{z^5} z^2\,d\theta \\
&= \int_{\theta=\arctan a}^{\theta=\arctan b} s^2 c\,d\theta \\
&= \int_{s=\mathrm{sen}\arctan a}^{s=\mathrm{sen}\arctan b} s^2\,ds \\
&= \tfrac{1}{3}s^3\Big|_{s=\mathrm{sen}\arctan a}^{s=\mathrm{sen}\arctan b} \\
&= \tfrac{1}{3}(\mathrm{sen}\arctan t)^3\Big|_{t=a}^{t=b}
\end{aligned}$$

5a) (0.4 pontos)
Altura: $2f(x_0) = 2\sqrt{1-(x_0-3)^2}$
Largura: ϵ
Raio (interno) da casca cilíndrica: x_0

5b) (0.4 pontos)
$A_i = (x_{i+1}-x_i)\cdot 2f(x_i) = 2f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$
$V_i = \pi(2(x_{i+1}-x_i)x_i)\cdot 2f(x_i) = 4\pi x_i f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$

5c) (0.6 pontos)
Aproximações por somatórios:
Área total: $\sum_{i=0,\ldots,n-1} A_i = \sum_{i=0,\ldots,n-1} 2f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$
Volume total: $\sum_{i=0,\ldots,n-1} V_i = \sum_{i=0,\ldots,n-1} 4\pi x_i f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$

5d) (0.6 pontos)
Área total:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0,\ldots,n-1} 2f(x_i)(x_{i+1}-x_i) &\approx \int_{x=x_0}^{x=x_n} 2f(x)\,dx \\
&= \int_{x=2}^{x=4} 4\sqrt{1-(x-3)^2}\,dx
\end{aligned}$$

Volume total:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0,\ldots,n-1} 4\pi x_i f(x_i)(x_{i+1}-x_i) &\approx \int_{x=x_0}^{x=x_n} 4\pi x f(x)\,dx \\
&= \int_{x=2}^{x=4} 4\pi\sqrt{1-(x-3)^2}\,dx
\end{aligned}$$