Cálculo Diferencial e Integral II
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 03/julho/2009

(1) (Total: 1.5 pontos). Encontre uma solução para a EDO $y' = 2xy$ — que não seja 0 em todo ponto — e verifique que a função que você encontrou é realmente uma solução da EDO.

(2) (Total: 4.0 pontos). Considere as duas EDOs lineares de 2ª ordem abaixo:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & y'' - 5y' + 6y & = & 0 \\ (2) & y'' - 2y' + 2y & = & 0 \end{array}$$

a) (0.6 pts) Encontre as soluções básicas da EDO (1).

b) (0.7 pts) Encontre as soluções básicas da EDO (2).

c) (0.6 pts) Encontre uma solução $y = f(x)$ da EDO (1) tal que $f(0) = 2$ e $f'(0) = 5$.

d) (0.7 pts) Encontre uma solução real (que não seja 0 em todo ponto!) para a EDO (2).

e) (0.7 pts) Verifique que as soluções do item (a) realmente obedecem a EDO (1).

f) (0.7 pts) Verifique que a solução do item (d) realmente obedecem a EDO (2).

(3) (Total: 4.5 pontos). Considere as duas EDOs abaixo, aparentemente equivalentes:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & xy' + y & = & 0 \\ (2) & x^2y' + xy & = & 0 \end{array}$$

a) (0.3 pts) Reescreva ambas na forma $\psi_y y' + \psi_x = 0$. Quem são ψ_y e ψ_x em cada um dos dois casos?

b) (0.7 pts) No caso (1) existe uma função $\psi(x, y)$ tal que a ψ_y e a ψ_x são suas derivadas parciais, mas no caso (2) não. Explique porquê.

c) (0.7 pts) Encontre uma $\psi(x, y)$ para a EDO (1) acima.

d) (0.7 pts) Encontre duas funções diferentes, $g(x)$ e $h(x)$, cujos gráficos, $y = g(x)$ e $y = h(x)$, correspondam a curvas de nível da ψ do item anterior.

e) (0.7 pts) Encontre a solução geral da EDO (1) — isto é, uma função $f(x, C)$ tal que para cada valor de C a curva $y = f(x, C)$ seja uma solução da EDO.

f) (0.7 pts) Verifique que as soluções dos itens (d) e (e), isto é, as curvas $y = g(x)$, $y = h(x)$ e as $y = f(x, C)$ (uma para cada C) são soluções da EDO (1).

g) (0.7 pts) Represente graficamente as soluções da EDO (1).

O diagrama principal que eu uso pra lembrar da relação entre EDOs separáveis e EDOs exatas é esse aqui:

$$(\psi(x,y) = v(y) - u(x))$$

$$\begin{tikzcd}
(\psi_y y' + \psi_x = 0) \arrow[dd, leftrightarrow] & (v_y y' - u_x = 0) \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow] & \\
& (y' = \frac{u_x}{v_y}) \arrow[d, leftrightarrow] & \\
(\psi = C) & (v - u = C) \arrow[l] \arrow[r, dotted] & y(x) = v^{-1}(C + u(x))
\end{tikzcd}$$

"Resolver" uma EDO é encontrar uma função $\psi(x,y)$ cujas curvas de nível sejam soluções da EDO ("$\psi = C$" no diagrama) ou então — isto é melhor ainda, mas nem sempre pode ser feito — encontrar um modo de expressar as soluções como funções de x e de uma constante C, que "escolhe" uma das soluções. Por exemplo: $y = \sqrt{x - C}$, que corresponde a:

$x = y^2 + C$,
$\psi(x,y) = y^2 - x$,
$y' = \frac{1}{2y}$,
$2yy' - 1 = 0$.

Mini-gabarito:

1) (1.5 pts) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2xe^{x^2} = 2xf(x)$

2a) (0.6 pts) $y'' - 5y' + 6y = (D^2 - 5D + 6)y = (D-2)(D-3)y$; as soluções básicas são e^{2x} e e^{3x}.

2b) (0.7 pts) $y'' - 2y' + 2y = (D^2 - 2D + 2)y = (D - (1 + i))(D - (1 - i))y$; as soluções básicas são $e^{1+i}x = e^x(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ e $e^{1-i}x = e^x(\cos -x + i \operatorname{sen} -x) = e^x(\cos x - i \operatorname{sen} x)$.

2c) (0.7 pts) $f(x) = e^{2x} + e^{3x}$

2d) (0.7 pts) $e^x \operatorname{sen} x$

2e) $(e^{2x})'' - 5(e^{2x})' + 6e^{2x} = (4 - 5 \cdot 2 + 6)e^{2x}$;

$(e^{3x})'' - 5(e^{3x})' + 6e^{3x} = (9 - 5 \cdot 3 + 6)e^{3x}$

2f)

$$\begin{aligned} (e^x \operatorname{sen} x)'' - 2(e^x \operatorname{sen} x)' + 2(e^x \operatorname{sen} x) &= \\ (e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x)' - 2(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x) + 2(e^x \operatorname{sen} x) &= \\ ((e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x) + (e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x)) - 2(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x) + 2(e^x \operatorname{sen} x) &= 0 \end{aligned}$$

3a) (0.3 pts)

(1) $xy' + y = \psi_y y' + \psi_x = 0$: $\psi_y = x$, $\psi_x = y$

(2) $x^2y' + xy = \psi_y y' + \psi_x = 0$: $\psi_y = x^2$, $\psi_x = xy$

3b) (0.7 pts) No caso (1), $\psi_{yx} = \psi_{xy} = 1$; no caso (2), $\psi_{yx} = 2x \neq \psi_{xy} = x$.

3c) (0.7 pts) $\psi(x, y) = xy$

3d) (0.7 pts) $\psi(x, y) = xy = 1$: $y = \frac{1}{x} = g(x)$.

$\psi(x, y) = xy = -1$: $y = -\frac{1}{x} = h(x)$.

3e) (0.7 pts) $y = \frac{C}{x}$

3f) (0.7 pts)

$x(x^{-1})' + (x^{-1}) = x(-x^{-2}) + (x^{-1}) = 0$

$x(-x^{-1})' + (-x^{-1}) = x(x^{-2}) + (-x^{-1}) = 0$

$x(Cx^{-1})' + (Cx^{-1}) = x(-Cx^{-2}) + (Cx^{-1}) = 0$

3g) (0.7 pts) Gráfico de $xy = C$.