Cálculo Diferencial e Integral II
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de Reposição - 06/julho/2009

(1) (Total: 2.5 pontos). A figura T — um "triângulo torto" — é delimitada pelas curvas p, r e s:

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & 2 - x^2 \\ r(x) & = & 2x - 1 \\ s(x) & = & \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2} x) - \frac{3}{2} \end{array}$$

Mais precisamente, os vértices de T são os pontos $(-2,-2)$, $(0,-1)$ e $(1,1)$, e a curva $y = p(x)$ liga o vértice $(-2,-2)$ ao vértice $(1,1)$, a curva $y = s(x)$ liga o $(-2,-2)$ ao $(0,-1)$, e a curva $y = r(x)$ liga o $(0,-1)$ ao $(1,1)$.

a) (1.0 pts) Represente a figura T graficamente e expresse a sua área como soma de integrais definidas.

b) (1.5 pts) Calcule a área de T (aqui o resultado deve ser um número). Obs: se você souber argumentos geométricos para acelerar o cálculo da área de T, use-os!

(2) (Total: 1.0 pontos). Seja $C = \{\, (x,y) \mid x \in [1,2], y = x^2 \,\}$. Trace num plano a curva C e ligue seus pontos extremos ao eixo vertical por retas horizontais. Seja R a região delimitada pela curva C, pelos dois segmentos horizontais e por um segmento do eixo vertical. Expresse a área da região R como uma soma de integrais definidas.

(3) (Total: 1.0 pontos). Calcule $\int_{\theta=a}^{\theta=b} (\operatorname{sen} \theta)^n (\cos \theta)^3 \, d\theta$ usando a substituição $s = \operatorname{sen} \theta$.

(4) (Total: 2.0 pontos). Use a substituição $c = \cos \theta$ para mostrar que $\int_{c=-1}^{c=1} \sqrt{1 - c^2} \, dc = \pi/2$. Dica: $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$.

(5) (Total: 3.5 pontos). Considere as duas EDOs abaixo, aparentemente equivalentes:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & yy' - x & = & 0 \\ (2) & y^2y' - xy & = & 0 \end{array}$$

a) (0.2 pts) Reescreva ambas na forma $\psi_y y' + \psi_x = 0$. Quem são ψ_y e ψ_x em cada um dos dois casos? Note que ainda não estamos estamos dizendo que a função $\psi(x, y)$ existe; estas ψ_y e ψ_x são candidatas a serem derivadas parciais de alguma função ψ, mas só nos próximos itens você vai tentar descobrir esta ψ.

b) (0.3 pts) No caso (1) acima existe uma função $\psi(x, y)$ tal que a ψ_y e a ψ_x são suas derivadas parciais, mas no caso (2) não. Explique porquê.

c) (0.5 pts) Encontre uma $\psi(x, y)$ para a EDO (1) acima.

d) (0.5 pts) Encontre duas funções diferentes, $g(x)$ e $h(x)$, cujos gráficos, $y = g(x)$ e $y = h(x)$, correspondam a curvas de nível da ψ do item anterior.

e) (0.5 pts) Encontre a solução geral da EDO (1) — isto é, uma função $f(x, C)$ tal que para cada valor de C a curva $y = f(x, C)$ seja uma solução da EDO.

f) (0.5 pts) Verifique que as soluções dos itens (d) e (e), isto é, as curvas $y = g(x)$, $y = h(x)$ e as $y = f(x, C)$ (uma para cada C) são soluções da EDO (1).

g) (1.0 pts) Represente graficamente as soluções da EDO (1). Dica: encontre uma solução que passe pelo ponto (1,1), uma que passe pelo ponto $(-1, 1)$, uma que passe pelo ponto (0,1) e uma que passe pelo ponto (1,0).

O diagrama da relação entre EDOs separáveis e EDOs exatas é:

$$
\begin{tikzcd}
 & (\psi(x,y) = v(y) - u(x)) & \\
(\psi_y y' + \psi_x = 0) \arrow[dd, leftrightarrow] & (v_y y' - u_x = 0) \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow] & \\
 & (y' = \frac{u_x}{v_y}) \arrow[d, leftrightarrow] & \\
(\psi = C) & (v - u = C) \arrow[l] \arrow[r, dotted] & y(x) = v^{-1}(C + u(x))
\end{tikzcd}
$$

"Resolver" uma EDO é encontrar uma função $\psi(x,y)$ cujas curvas de nível sejam soluções da EDO ("$\psi = C$" no diagrama) ou então — isto é melhor ainda, mas nem sempre pode ser feito — encontrar um modo de expressar as soluções como funções de x e de uma constante C, que "escolhe" uma das soluções. Por exemplo: $y = \sqrt{x - C}$, que corresponde a:

$x = y^2 + C$,
$\psi(x,y) = y^2 - x$,
$y' = \frac{1}{2y}$,
$2yy' - 1 = 0$.

Mini-gabarito:

1a) (1.0 pts) Desenho, e: $\int_{-2}^{1} p(x)\,dx - \int_{-2}^{0} s(x)\,dx - \int_{0}^{1} r(x)\,dx$

1b) (1.5 pts) Área total = 6.

$\int_{-2}^{1} p(x)\,dx = \int_{-2}^{1} 2 - x^2\,dx = 3$

$\int_{-2}^{0} s(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}x) - \frac{3}{2}\,dx = -3$

$\int_{0}^{1} r(x)\,dx = \int_{0}^{1} 2x - 1\,dx = -3$

2) (1.0 pts) Área $= \int_0^2 4\,dx - \int_0^1 1\,dx - \int_1^2 x^2\,dx$

3) (1.0 pts)

$$\begin{array}{rcl}
\int s^n c^3\,d\theta &=& \int s^n(1-s^2)c\,d\theta \\
&=& \int s^n(1-s^2)\,ds \\
&=& \int s^n - s^{n+2}\,ds \\
&=& \frac{1}{n}s^{n+1} - \frac{1}{n+3}s^{n+3} \\
&=& \frac{1}{n}(\operatorname{sen}\theta)^{n+1} - \frac{1}{n+3}(\operatorname{sen}\theta)^{n+3} \\
\int_{\theta=a}^{\theta=b}(\operatorname{sen}\theta)^n(\cos\theta)^3\,d\theta &=& (\frac{1}{n}(\operatorname{sen}\theta)^{n+1} - \frac{1}{n+3}(\operatorname{sen}\theta)^{n+3})\Big|_{\theta=a}^{\theta=b}
\end{array}$$

4) (2.0 pts)

$$\begin{array}{rcl}
\int\sqrt{1-c^2}\,dc &=& \int\sqrt{s^2}\,dc \\
&=& \int\sqrt{s^2}(-s)\,d\theta \\
&=& \int -s^2\,d\theta \\
&=& \int -\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
\int_{c=-1}^{c=1}\sqrt{1-c^2}\,dc &=& \int_{\theta=\arccos -1}^{\theta=\arccos 1} -\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&=& \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} -\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&=& \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&=& \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{2}\,d\theta \\
&=& \frac{\pi}{2}
\end{array}$$

5a) (0.2 pts) 1: $\psi_y = y$, $\psi_x = -x$. 2: $\psi_y = y^2$, $\psi_x = -xy$.

b) (0.3 pts) A (1) é exata ($\psi_{yx} = \psi_{xy} = 0$), a (2) não.

c) (0.5 pts) $\psi(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$

d) (0.5 pts) $g(x) = x$, ou $g(x) = -x$, ou $h(x) = \sqrt{1+x^2}$, etc

e) (0.5 pts) $f(x,C) = \sqrt{C+x^2}$, etc

f) (0.5 pts) (3 verificações)

g) (0.5 pts) Gráfico de $x^2 - y^2 = C$.

$\left[\begin{smallmatrix} c=\cos\theta \\ dc=-s\,d\theta \\ \theta=\arccos c \end{smallmatrix}\right]$