Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(3) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(4) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(5) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(2) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n + 1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(4) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(2) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n + 1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(4) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n + 1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n + 1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(5) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n + 1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(5) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

(3) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\,\exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Seja $A = \{0,1,2,3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Seja $A = \{0,1,2,3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(2) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(3) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(3) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(3) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(4) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n + 1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(5) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n + 1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.0 pontos) Seja $A = \{0,1,2,3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(4) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(3) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(5) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(3) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(4) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(5) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

(3) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(2) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.

b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.

c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.

d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(4) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(5) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,0),\ (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.

b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.

c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(3) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(4) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Seja $A = \{0,1,2,3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(5) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(2) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n + 1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(4) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n + 1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(5) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

(2) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(3) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(4) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(4) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(5) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,0), (0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(2) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(3) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.

a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.

b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.

c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.

d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.

a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.

b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.

c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}. b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(3) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(3) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ é sempre verdade.

(4) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(5) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição (VR) - 01/julho/2009

Questões:

(1) (2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

(2) (2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

(3) (2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

(4) (2.0 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e seja $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

(5) (1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Gabarito:

(Questão `Binary` - 2.0 pontos) Digamos que a seqüência $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ obedece estas três propriedades: (1) $b_0 = 0$, (2) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k} = 10b_k$, (3) $\forall k \in \mathbb{N}.\, b_{2k+1} = 10b_k + 1$. O que você sabe sobre b_{12}?

Gabarito:
$b_1 = b_{2\cdot 0+1} = 10b_0 + 1 = 1$
$b_3 = b_{2\cdot 1+1} = 10b_1 + 1 = 11$
$b_6 = b_{2\cdot 3} = 10b_3 = 110$
$b_{12} = b_{2\cdot 6} = 10b_6 = 1100$

(Questão `Induction` - 2.5 pontos) Considere a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ definida por: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Defina $P(n) = (9a_n + 1 = 10^n)$.
a) (0.4 pts) Calcule $a_1, a_2, a_3, P(0), P(1), P(2), P(3)$.
b) (0.9 pts) Mostre que $P(20) \to P(21)$.
c) (0.9 pts) Mostre que $P(n) \to P(n+1)$ vale para qualquer n.
d) (0.3 pts) Prove $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

Gabarito:
$a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$
$P(0) = (9a_0 + 1 = 10^0) = (9 \cdot 0 + 1 = 1) = V$
$P(1) = (9a_1 + 1 = 10^1) = (9 \cdot 1 + 1 = 10) = V$
$P(2) = (9a_2 + 1 = 10^2) = (9 \cdot 11 + 1 = 100) = V$
$P(3) = (9a_3 + 1 = 10^3) = (9 \cdot 111 + 1 = 1000) = V$

$$\begin{array}{rcl} P(20) \to P(21) & \leftrightarrow & (9a_{20} + 1 = 10^{20} \to 9a_{21} + 1 = 10^{21}) \\ & \leftrightarrow & (9a_{20} + 1 = 10^{20} \to 9(10a_{20} + 1) + 1 = 10 \cdot 10^{20}) \\ & \leftrightarrow & (9a_{20} + 1 = 10^{20} \to 90a_{20} + 10 = 10 \cdot 10^{20}) \\ & \leftrightarrow & (9a_{20} + 1 = 10^{20} \to 10(9a_{20} + 1) = 10 \cdot 10^{20}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(n) \to P(n+1) & \leftrightarrow & (9a_n + 1 = 10^n \to 9a_{n+1} + 1 = 10^{n+1}) \\ & \leftrightarrow & (9a_n + 1 = 10^n \to 9(10a_n + 1) + 1 = 10 \cdot 10^n) \\ & \leftrightarrow & (9a_n + 1 = 10^n \to 90a_n + 10 = 10 \cdot 10^n) \\ & \leftrightarrow & (9a_n + 1 = 10^n \to 10(9a_n + 1) = 10 \cdot 10^n) \end{array}$$

(Questão `Or` - 1.0 pontos) Prove que $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ é sempre verdade.

Gabarito:
Tabela de verdade (4 linhas).

(Questão `P-any` - 2.5 pontos) Defina uma proposição sobre os naturais, $P : \mathbb{N} \to \Omega$, tal que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ sejam verdadeiras mas $P(4)$ seja falsa. Diga quais são os valores de verdade de $P(6)$, $P(7)$, $P(20)$ e $P(100)$. Diga se $\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)$ é verdadeiro ou falso, e porquê.

Gabarito:
Uma possibilidade: $P(n) = (n \neq 4)$.
$P(6) = P(7) = P(20) = P(100) = V$
$(P(3) \to P(4)) = (V \to F) = F$
$(\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \to P(n+1)) = F$, o contra-exemplo é $n = 3$.

(Questão `Square` - 2.0 pontos) Seja $A = \{0,1,2,3\}$ e seja $R = \{(0,1),$ $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,0)$, $(0,2)\} \subseteq A^2$ uma relação sobre A. Seja $S = R \cup R^{-1}$.
a) (0.6 pts) Represente S como conjunto.
b) (0.7 pts) Represente R e S como grafos direcionados.
c) (0.7 pts) Mostre que S não é transitiva.

Gabarito:
$S = \{(0,1),(1,0),\ (1,2),(2,1),\ (2,3),(3,2),\ (3,0),(0,3),\ (0,2),(2,0)\}$
Desenho: $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ com setas $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 0$ e $0 \to 2$, sem a diagonal $1 \to 3$.
S é a mesma coisa, mas as setas são bidirecionais.
Contra-exemplo: $1S2 \land 2S3 \not\to 1R2$.