Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Prova suplementar (VS) - 08/julho/2009

Vamos definir a operação $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$, a função $p : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ e a relação $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ assim:

$$\begin{array}{rcl} a \oplus b & = & \begin{cases} 0 & \text{se } a+b \text{ é par} \\ 1 & \text{se } a+b \text{ é ímpar} \end{cases} \\ p(a) & = & a \oplus 0, \\ aEb & \Leftrightarrow & a \oplus b = 0. \end{array}$$

(1) (Total: 2.0 pontos). Mostre que $\forall a,b,c \in \{0,1\}$ temos $a \oplus a = 0$, $a \oplus b = b \oplus a$, $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$, $p(p(a)) = p(a)$, $p(a) = p(a+2)$.

(2) (Total: 1.0 pontos). Quais são as classes de equivalência da relação E? Quem são $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$?

(3) (Total: 2.5 pontos). A matriz 8×8 M, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{18} \\ a_{21} & \dots & & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{81} & \dots & & a_{88} \end{pmatrix}$,

é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \text{ ou } j = 1, \\ 1 & \text{se } i = 7 \text{ e } j = 7, \\ a_{(i-1)j} \oplus a_{i(j-1)} & \text{em todos os outros casos.} \end{cases}$$

Calcule a matriz M.

(4) (Total: 1.5 pontos). Diga se as seguintes sentenças são verdadeiras ou falsas. Justifique.

a) $\forall i \in \{1,2,\dots,8\}. \exists j \in \{5,6,7,8\}. a_{ij} = 0$
b) $\exists i \in \{1,2,\dots,8\}. \forall j \in \{5,6,7,8\}. a_{ij} = 0$
c) $\exists i \in \{1,2,\dots,8\}. \forall j \in \{5,6,7,8\}. a_{ij} \neq 0$

(5) (Total: 3.0 pontos). Defina três relações, $F, G, H \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, assim:

$$\begin{array}{rcl} aFb & \Leftrightarrow & (a - p(a) = b - p(b)) \\ aGb & \Leftrightarrow & (a - p(a) = b) \\ aHb & \Leftrightarrow & (a = b - p(b)) \end{array}$$

Para cada uma delas diga se ela é ou não reflexiva, simétrica, transitiva, e se é ou não o gráfico de uma função. Justifique.

Definições:

Um *contra-exemplo* para $\forall x \in A.P(a)$ é um $a \in A$ tal que $P(a)$ é falso.

Uma sentença da forma $\forall x \in A.P(a)$ é falsa se e só se algum $a \in A$ é um contra-exemplo para $\forall x \in A.P(a)$.

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Mini-gabarito:

(1) Tabelas com 2, 4 ou 8 linhas.

(2) O conjunto dos pares e o conjunto dos ímpares; $[0] = [2] = \{0, 2, 4, \ldots\}$; $[1] = [3] = \{0, 2, 4, \ldots\}$.

(3)

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&&1&&1&&1& \\ 1&1&&&1&1&& \\ 1&&&&1&&& \\ 1&1&1&1&&&& \\ 1&&1&&&&& \\ 1&1&&&&&1&1 \\ 1&&&&&&1& \end{pmatrix}$$

(4a) Falso para $i = 1$

(4b) Verdadeiro para $i = 4$

(4c) Falso para $i = 1$

(5) F é RST, não é gráfico porque $0R0$ e $0R1$;