Cálculo 2 - Lista de exercícios 1
Eduardo Ochs - PURO-UFF - 2009.2
Versão: 2009sep28, 9:10

(1) O Malta/Pesco/Lopes ("Cálculo a uma Variável, volume II - Derivada e Integral") define na p.216 o que é uma "boa primitiva" para uma função $f(x)$: é uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e tal que a definição de $F(x)$ não envolve o sinal "$\int$".

Neste exercício você vai tentar encontrar uma "boa primitiva" para uma função $f(x)$, mas com uma outra noção de "boa". Lembre que em alguns casos preferimos definir funções por casos e evitar o sinal "$|\cdot|$", em outros casos preferimos definições numa linha só, e permitimos usar o "$|\cdot|$". Neste exercício você vai procurar respostas definidas por casos, sem "$|\cdot|$" e sem "$\int$" — mas você pode usar "$|\cdot|$", "$\int$" e gráficos nos passos intermediários.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{para } x \leq 2 \\ -1, & \text{para } x \in (2,4) \\ x-6, & \text{para } x \geq 4, \end{cases}$$

e seja $F(b) = \int_0^b f(x)\,dx$.

(a) Calcule $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(7)$.

(b) Encontre uma definição por casos, sem "$|\cdot|$" e "$\int$", para $F(b)$.

(c) Calcule $F(b+1)$ para $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(d) Encontre uma definição por casos, sem "$|\cdot|$" e "$\int$", para $H(x) = F(x+1)$.

(e) Encontre uma "boa derivada" (definida por casos, sem "$|\cdot|$" e "$\cdot'$") para $H(x)$, *de dois modos diferentes*: "na marra", isto é, como se você não conhecesse $f(x)$, e usando os TFCs.

(2) As duas contas abaixo estão certas? Sim, não, porquê?

$$\int (x-1)^2\,dx = \left[\begin{smallmatrix} u=x-1 \\ x=u+1 \\ dx=du \end{smallmatrix}\right] \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3} = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{1}{3}$$

$$\int (x-1)^2\,dx = \int x^2 - 2x + 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$$

Explique o que está acontecendo, o que estes dois resultados querem dizer, e localize nos livros de Cálculo a que você tiver acesso os trechos que discutem idéias relacionadas a isto.

(3) Calcule e interprete graficamente cada uma das expressões abaixo:

$$\begin{array}{ll} a) & \int_{x=-2}^{x=2} 1 - x^2\,dx \\ b) & \int_{x=-2}^{x=2} |1 - x^2|\,dx \\ c) & \left|\int_{x=-2}^{x=2} 1 - x^2\,dx\right| \\ d) & \int_{x=2}^{x=-2} 1 - x^2\,dx \end{array}$$

(4) Calcule:

$$\begin{array}{llcl} a) & F(a,b) & = & \int_{x=a}^{x=b} x+2\,dx \\ b) & G(a,b) & = & \int_{t=a}^{t=b} t+2\,dt \\ c) & H(x) & = & \int_{t=2x}^{t=3x} t+2\,dt \\ d) & H'(x) & & \end{array}$$

(5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que vale 2 em $(\infty, 1]$, vale -2 em $[5, \infty)$ e é um segmento de reta em $[1, 5]$. A partir do gráfico de $f(x)$ desenhe o gráfico de $f'(x)$, o gráfico de uma primitiva de $f(x)$ e o gráfico de uma integral definida (diga qual!) de $f(x)$.

Sugestões:

Quando você estiver em dúvida sobre o melhor nível de detalhe de uma resposta escreva-a com vários níveis de detalhes diferentes, releia depois as suas várias soluções, discuta com os seus colegas.

Vários livros – o Malta/Pesco/Lopes, na introdução, o Scheinerman de Matemática Discreta em vários lugares, etc – falam bastante sobre "redação de provas" ("provas" no sentido de "demonstrações" e "soluções de problemas"). O termo "redacão" é muito adequado... lembre que quando você fazia aula de Redação uma redação não estava "certa" ou "errada" – se ela não tivesse erros de concordância, erros lógicos, etc, você podia pensar em redações *melhores* e *piores*, e em como melhorar uma redação reescrevendo trechos dela... A mesma coisa acontece com os cursos de Matemática na universidade: chegar ao resultado certo é só metade do problema, a outra metade é escrever o caminho até a solução do modo melhor e mais claro possível, inclusive "traduzindo" entre representações algébricas, em Português, e gráficas.