Matemática Discreta - Primeira Prova (P1)
PURO-UFF - 2009.2
07/outubro/2009
Prof: Eduardo Ochs

1) (3.0 pontos) Considere as duas sentenças abaixo:

(*) Todo múltiplo de 3 é múltiplo de 9.
(**) $\forall a \in \mathbb{Z}.\, (9|a \to 3|a)$.

a) (0.3 pts) Traduza a sentença (*) para Matematiquês.
b) (0.3 pts) Traduza a sentença (**) para Português.
c) (2.4 pts) Para cada uma das sentenças (*) e (**) diga se ela é verdadeira ou falsa; se ela for verdadeira demonstre-a, se ela for falsa, refute-a.

2) (2.0 pontos) Considere as quatro sentenças abaixo:
$(P \land Q) \to R$ (vamos chamar esta de "A"),
$P \to (Q \to R)$ (vamos chamar esta de "B"),
$Q \to (P \to R)$ (vamos chamar esta de "C"),
$Q \to R$ (vamos chamar esta de "D").
Quais as relações entre as sentenças acima? Quais são logicamente equivalentes, quais não são? $C \to D$ ou $C \not\to D$? Diga tudo que você puder sobre elas.

3) (2.0 pontos) Minha tia tem 30 CDs, "Roberto Carlos 1", "Roberto Carlos 2", etc, até "Roberto Carlos 30", e ela tem um aparelho de CD com uma bandeja na qual cabem 4 CDs. Os espaços para CDs na bandeja são numerados de 1 a 4, e quando ela aperta o botão "TOCAR TUDO" do aparelho ele toca os CDs das bandejas 1, 2, 3 e 4 em ordem.
a) (1.0 pts) Quantos modos diferentes ela tem de programar o aparelho para tocar 4 CDs?
b) (1.0 pts) Expresse a resposta do problema anterior formalmente usando a linguagem de conjuntos e listas.

4) (1.0 pontos) Sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{5,6\}$.
Mostre que $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ são conjuntos diferentes.

5) (2.0 pontos) Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{\{1,2\},1,2\}$. Calcule o valor de verdade das duas sentenças abaixo:
a) $A \in B$
b) $A \subseteq B$

Algumas definições:
$\mathcal{P}(A) \ = \ \{ B \mid B \subseteq A \}$
$A \times B \ = \ \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$
$A \cap B \ = \ \{ a \in A \mid a \in B \}$
$A \subseteq B$ se e só se $\forall a \in A,\, a \in B$
$A = B$ se e só se $A \subseteq B \land B \subseteq A$
$a|b$ se e só se $\exists x \in \mathbb{Z}.\, ax = b$
a é *par* se e só se $\exists x \in \mathbb{Z}.\, a = 2x$
a é *ímpar* se e só se $\exists x \in \mathbb{Z}.\, a = 2x + 1$

Dicas:
$\exists a \in \{ 4,5,6 \}.\, a^2 = 25 \ \rightsquigarrow \ 4^2 = 25 \lor 5^2 = 25 \lor 6^2 = 25$
$\forall a \in \{ 4,5,6 \}.\, a^2 = 25 \ \rightsquigarrow \ 4^2 = 25 \land 5^2 = 25 \land 6^2 = 25$
$a \in \{ 4,5,6 \} \ \rightsquigarrow \ a = 4 \lor a = 5 \lor a = 6$
Operações sobre listas: se a é uma lista então
$\mathsf{compr}(a)$ é o comprimento de a e $a_1, \ldots, a_{\mathsf{compr}(a)}$ são
as componentes de a. Se $\mathsf{compr}(a) = 3$ então $a = (a_1, a_2, a_3)$.

A prova é para ser feita em duas horas, sem consulta.
Responda claramente e justifique cada passo.
Lembre que a correção irá julgar o que você escreveu, e
que é impossível ler o que você pensou mas não escreveu.
Lembre que a resposta esperada para cada questão não é só
uma fórmula ou um número — a “resposta certa” é um
raciocínio claro e convincente, com todos os detalhes
necessários, mostrando que você sabe traduzir corretamente
entre as várias linguagens (português, diagramas,
matematiquês, etc) e explicando o que você está fazendo
quando for preciso.
Outra dica: *confira as suas respostas!*

Boa prova!

Mini-gabarito (versão: 2009oct14, sem a lista dos erros comuns e sem a pontuação por idéias específicas):

```
1a) (0.3 pts)
(*) Todo múltiplo de 3 é múltiplo de 9.
    Para todo x∈\Z se x é múltiplo de 3 então x é múltiplo de 9.
    Para todo x∈\Z se 3 divide x então 9 divide x.
    Para todo x∈\Z se 3|x então 9|x.
    ∀x∈\Z.(3|x -> 9|x).

1b) (0.3 pts)
(**) ∀a∈\Z.(3|a -> 9|a).
     Para a∈Z se 3 divide a então 9 divide a.
     Para todo inteiro a se 3 divide a então 9 divide a.

1c) (2.4 pts)
   A sentença (*), "∀x∈\Z.(3|x -> 9|x)", é falsa.
   Para refutá-la basta mostrar um contra-exemplo; os contra-exemplos
   possíveis são 3, 6, 12, 15, 21, 24, ... e -3, -6, -12, -15, etc.
   Em detalhes:
     3|12 é verdade e 9|12 é falso;
     daí (3|12 -> 9|12) é falso,
     e se x=12 então (3|12 -> 9|12) é falso;
     daí (∀x∈\Z.(3|x -> 9|x)) é falso.

   A sentença (**), "∀a∈\Z.(9|a -> 3|a)", é verdadeira. Vamos prová-la.
   Começamos supondo que a é um inteiro tal que 9|a.
   Então pela definição de divisibilidade existe um inteiro b tal que 9b=a.
   Como 9=3·3 então 9b=(3·3)b=3(3b); como 9b=a então a=9b=3(3b).
   Dai existe um inteiro c, c=3b, tal que a=3c, e pela definição de
   divisibilidade temos que 3|a.
   Concluímos que para qualquer a∈Z se 9|a então 3|a -
   ou seja, que ∀a∈\Z.(9|a -> 3|a).


2) (2.0 pts)
```

				"A"	"D"	"B"		"C"
P	Q	R	P∧Q	(P∧Q)->R	Q->R	P->(Q->R)	P->R	Q->(P->R)
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

```
    As sentenças A, B e C são logicamente equivalentes,
    e a sentença D não é equivalente a nenhuma delas.
    Em todas as situções nas quais D é verdade A, B e C
    também são verdade, portanto D->A, D->B e D->C são
    verdade; mas A-/->D, B-/->D e C-/->D, porque há uma
    situação - P=0, Q=1 e R=0 - na qual A, B e C são
    verdadeiras mas a D é falsa.
```

```
3a) (1.0 pts)
    Ela tem que pôr um dos 30 CDs na primeira bandeja,
    um dos 29 outros CDs na segunda bandeja,
    um dos 28 outros CDs na terceira bandeja,
    e um dos 27 outros CDs na quarta bandeja.
    Daí ela tem 30·29·28·27 modos diferentes de colocar
    quatro CDs no aparelho.

 b) (1.0 pts)
    Um modo de escolher os 4 CDs é uma lista de quatro
    números, (a,b,c,d), na qual a,b,c,d ∈ {1, 2, ..., 30}
    e não há repetições - ou seja, a!=b ∧ a!=c ∧ a!=d ∧
    b!=c ∧ b!=d ∧ c!=d.
    O conjunto das soluções do problema é o conjunto de
    todas estas listas:

      S = {(a,b,c,d)| a,b,c,d∈{1,2,...,30} ∧
                      a!=b ∧ a!=c ∧ a!=d ∧
                             b!=c ∧ b!=d ∧
                                    c!=d},

    e vimos que S tem exatamente 30·29·28·27 elementos
    diferentes; em matematiquês, |S| = 30·29·28·27.


4) (1.0 pts) Há várias provas possíveis. Uma é:

   (A×B)×C
   --> {(x,c)|x∈A×B, c∈C}
   --> {(x,c)|x∈{(a,b)|a∈A, b∈B}, c∈C}
   --> {((a,b),c)|a∈A, b∈B, c∈C}
   --> {((a,b),c)|a∈{1,2}, b∈{3,4}, c∈{5,6}}
   --> {((1,3),5), ((1,3),6), ((1,4),5), ((1,4),6),
        ((2,3),5), ((2,3),6), ((2,4),5), ((2,4),6)}

   A×(B×C)
   --> {(a,y)|a∈A, y∈B×C}
   --> {(a,(b,c))|a∈A, b∈B, c∈C}
   --> {(1,(3,5)), (1,(3,6)), (1,(4,5)), (1,(4,6)),
        (2,(3,5)), (2,(3,6)), (2,(4,5)), (2,(4,6))}

   e aí vemos que (A×B)×C tem elementos que não estão em A×(B×C)
   e vice-versa.

5) (2.0 pts)
   A = {1, 2}
   B = {{1, 2}, 1, 2}

   A∈B --> A={1, 2} ∨ A=1 ∨ A=2
       --> V ∨ F ∨ F
       --> V

   A \subseteq B --> ∀a∈A. a∈B
                 --> ∀a∈{1, 2}. a∈B
                 --> 1∈B ∧ 2∈B
                 --> V ∧ V
                 --> V
```