Cálculo 2 - 2010jun09
Exercícios de preparação para a P2 e para um trabalho -
versão preliminar

Definição: uma *partição* é um objeto matemático composto de três partes:
• um valor de $n \in \mathbb{N}$,
• uma seqüência $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ com $x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n$,
• uma seqüência $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ com $\zeta_1 \in [x_0, x_1], \ldots, \zeta_n \in [x_{n-1}, x_n]$.
Uma *partição do intervalo* $[a, b]$ é uma partição na qual $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Repare que temos várias escolhas "óbvias" de partições para um intervalo $[a, b]$ "em n subintervalos". Por exemplo, podemos dividir o intervalo original em n subintervalos iguais, e aí:
• fazer $\zeta_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ para todo i, *ou*
• fazer $\zeta_i = x_{i-1}$ para todo i, *ou*
• fazer $\zeta_i = x_i$ para todo i.
Mas a noção de partição é bem mais geral que isto, e a folha de exercícios sobre Integral de Riemann (aquela manuscrita, com data de 16/nov/2009 no cabeçalho) tinha alguns exemplos nos quais os subintervalos tinham comprimentos diferentes.

Quando conhecemos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma partição P a expressão $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ "pode ser calculada" — sabemos que ela representa um número, e mesmo que não consigamos calcular o seu valor "na mão", fazendo contas exatas simbolicamente, devemos ser capazes podemos calculá-la[1] com uma calculadora ou computador.

Repare que se fixamos f e P a expressão $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ "faz sentido", isto é, "pode ser calculada" — mas a expressão $f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ só "faz sentido" *dentro* do sinal de somatório, porque ela faz referência ao valor de i.

Mini-exercícios:
(1) Defina as três partições "óbvias" em 1001 subintervalos para o intervalo $[3, 4]$.
(2) Defina as três partições "óbvias" em $2k$ subintervalos para o intervalo $[c, d]$.
(3) Defina as três partições "óbvias" em n subintervalos para o intervalo $[a, b]$.

Note que quando dizemos "P é uma partição em 1001 subintervalos para o intervalo $[3, 4]$" nós estamos fixando o n da partição P ($n = 1001$) e também $a = x_0 = 3$ e $b = x_n = x_{1001} = 4$. Quando dizemos "...em $2k$ subintervalos para o intervalo $[c, d]$" nós estamos declarando que k, c e d são números com valores conhecidos — mas que nós vamos nos referir aos seus valores pelos nomes 'k', 'c' e 'd'. Quando dizemos "...em n subintervalos para o intervalo $[a, b]$" algo um pouco mais sutil acontece: *passamos a considerar que n, a e b são números conhecidos.*

[1] na verdade sabemos calcular uma *aproximação* para ela.

(Abreviações: “VSR” = “volume de sólido de revolução”,
“ASR” =“área de superfície de revolução”.)

O trabalho que eu passei sobre deduzir as fórmulas para VSRs e ASRs tem vários objetivos:

• fazer vocês calcularem certas coisas (p.ex., área de um pedaço de cone) em casos particulares,

• fazer vocês tentarem generalizar um método de calcular algo, trocando quantidades numéricas por variáveis,

• fazer vocês testarem as fórmulas com variáveis que vocês obtiveram,

• fazer vocês encontrarem modos de apresentar uma dedução de uma fórmula,

• fazer vocês começarem a aprender a trabalhar com uma “função qualquer”, um “intervalo qualquer” e uma “partição qualquer”,

Exercícios (vários destes foram feitos em sala, mas lembrem da recomendação de que vocês os refizessem em casa!... Vários deles podem virar partes do trabalho sobre VSRs e ASRs, e todos são úteis como preparação para a P2):

(4) Escolha uma função f e uma partição P. Existe uma “aproximação óbvia” para f por uma função-escada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Represente graficamente f e g.
(5) Escolha uma função f e uma partição P. Defina formalmente (com uma definição por casos) a “aproximação óbvia para f por uma função-escada”.
(6) Generalize o que você fez no exercício anterior: suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer e que P é uma partição qualquer (de um intervalo $[a, b]$ qualquer), e dê uma definição formal, por casos (use ‘...’ onde precisar) da “aproximação óbvia para f por uma função escada”.
(7) Escolha uma função f e uma partição P. Existe uma “aproximação óbvia” para f por uma função poligonal $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, cujos “vértices” são os pontos $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.
(8) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $(2, 1)$ e $(6, 4)$.
(9) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Teste a sua equação com os pontos do exercício anterior.
(10) Dê uma definição formal, por casos, da função poligonal $g : [2, 7] \to \mathbb{R}$ cujos vértices são os pontos $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $(x_1, y_1) = (6, 4)$, $(x_2, y_2) = (7, 4)$. Mostre como usar a sua definição para calcular $g(3)$, $g(6)$ e $g(6.5)$; mostre o que acontece quando tentamos calcular $g(10)$ usando a sua definição.
(11) Agora suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer e P é uma partição qualquer. Generalize a definição formal do item anterior.

(Lembre que em todos os exemplos que vimos em sala as rotações eram feitas em torno do eixo horizontal, $y = 0$ — vamos continuar usando esta rotação).

(12) Nós vimos em sala que o SR gerado pelo segmento horizontal que liga os pontos $(2, 3)$ e $(4, 3)$ é um cilindro. Explique como calcular o volume deste cilindro, e calcule-o explicitamente. Sugestões de terminologia: A_B é a área da base, r_B é o raio da base, h é a altura. *Lembre de sempre usar desenhos e explicações em português pra deixar claro o que você está fazendo.*

(13) Mostre como calcular o volume do SR gerado pelo segmento horizontal de altura y_1 e base $[x_0, x_1]$.

(14) Mostre como calcular o volume do SR gerado por cada segmento horizontal de uma função-escada.

(15) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, P uma partição para o intervalo $[a, b]$. Defina uma função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ que é uma aproximação de f por uma função escada (explique como!), e encontre um somatório que expressa o volume do SR gerado por G.

(16) Mostre como planificar o pedaço de cone obtido pela rotação do segmento que liga os pontos $(2, 1)$ a $(6, 4)$. Represente graficamente a "versão planificada" desse cone. Sugestões de terminologia: r_I, r_E, c_I, c_E, θ, h, etc.

(17) Calcule a área do pedaço de cone (planificado) do exercício anterior.

(18) Mostre como planificar o pedaço de cone obtido pela rotação do segmento que liga os pontos (x_0, y_0) a (x_1, y_1). Mostre como as quantidades r_I, r_E, c_I, c_E, θ, h, A_I, A_E (onde A_I e A_E são as áreas do "pacman interno" e do "pacman externo") se relacionam. Encontre uma fórmula para $A_E - A_I$ — a área da versão planificada do pedaço de cone — a partir de (x_0, y_0), (x_1, y_1).

(19) Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função poligonal com vértices $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ então existe pelo menos um modo "óbvio" de construir uma partição P "associada à g". Descreva esta partição, primeiro para o caso no qual os vértices são $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $(x_1, y_1) = (6, 4)$, $(x_2, y_2) = (7, 4)$, depois para o caso geral. Obs: não esqueça os 'ζ_i's!

(20) Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função poligonal a rotação do gráfico de g em torno do eixo horizontal é uma figura composta por vários pedaços de cones. Explique como obter a ASR de cada um destes pedaços de cones e encontre um somatório que calcula a área total. *Se você não estiver seguro da fórmula que você obteve, teste-a no caso em que os vértices são* $(2, 1)$, $(6, 4)$, $(7, 4)$.

Agora vamos ver como passar de somatórios para integrais.

A fórmula exata[2] que relaciona somatórios e integrais é a seguinte: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável, então:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{P \text{ part } [a,b] \\ |P|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

onde "P part $[a,b]$" é uma abreviatura para P é uma partição do intervalo $[a,b]$.

Repare que *dentro do limite* a partição P (e daí o n, os 'x_i's e os 'ζ_i's) estão definidos.

Nós vamos usar uma versão meio acochambrada desta fórmula:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

Se tivermos dentro do somatório uma função $f(\zeta_i)$ "com a forma certa" vamos poder *converter o somatório numa integral*.

(Exemplos e detalhes depois.)

[2] na verdade ela é a *definição formal* do valor da integral.