Cálculo 2 - 2010jul04
Exercícios de preparação para a P3 -
versão preliminar

A composta de duas funções f e g, $f \circ g$, é definida da seguinte forma: para todo valor de x, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Por exemplo, se $f(y) = y^2$ e $g(x) = x + 1$ então:

$$\begin{array}{rcccl} f(g(x)) & = & f(x+1) & = & (x+1)^2 \\ f(g(x)) & = & g(x)^2 & = & (x+1)^2 \end{array}$$

Repare que neste caso podemos pensar que temos gráficos $y = g(x)$, $z = f(y)$, $z = (f \circ g)(x)$ (tente imaginar estes três gráficos juntos em $\mathbb{R}^3$!).

É muito comum usarmos a mesma variável nas duas funções que queremos compor — por exemplo, $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$ — e aí os dois modos de compor f e g, $f \circ g$ e $g \circ f$, "fazem sentido", mas precisamos de um pouco mais de atenção para não nos enrolarmos nas contas:

$$\begin{array}{rcccl} f(g(x)) & = & f(x+1) & = & (x+1)^2 \\ f(g(x)) & = & g(x)^2 & = & (x+1)^2 \\ g(f(x)) & = & g(x^2) & = & x^2+1 \\ g(f(x)) & = & f(x)+1 & = & x^2+1 \end{array}$$

Vamos fixar uma função f:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

(depois vamos generalizar as idéias deste exercício para uma f qualquer). Podemos definir duas operações, $(f\circ)$ e $(\circ f)$, que recebem funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e retornam outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcccl} (f\circ) & : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ & & g & \mapsto & (f\circ)(g) = f \circ g \\ (\circ f) & : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ & & g & \mapsto & (\circ f)(g) = g \circ f \end{array}$$

então por exemplo, $(f\circ)(\mathrm{sen})(x) = (\operatorname{sen} x)^2$ e $(\circ f)(\mathrm{sen})(x) = \operatorname{sen} x^2$.
(1) Seja $g(x) = x^3$. Calcule $(f\circ)(g)$ e $(\circ f)(g)$.
(2) Seja $g(x) = 4x^3$. Calcule $(f\circ)(4g)$ e $(\circ f)(4g)$.
(3) Sejam $a = 4$, $b = 5$, $g = \mathrm{sen}$, $h = \cos$. Calcule $(f\circ)(ag + bh)$ e $a(f\circ)g + b(f\circ)h$.
(4) Generalize: para $a, b \in \mathbb{R}$ e $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, calcule $(f\circ)(ag + bh)$ e $a(f\circ)g + b(f\circ)h$.
(5) Sejam $a = 4$, $b = 5$, $g = \mathrm{sen}$, $h = \cos$. Calcule $(\circ f)(ag + bh)$ e $a(f\circ)g + b(f\circ)h$. A operação $(\circ f)$ é linear? Porquê?
(6) Generalize: para $a, b \in \mathbb{R}$ e $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, calcule $(\circ f)(ag + bh)$ e $a(\circ f)g + b(f\circ)h$. A operação $(f\circ)$ é linear? Porquê?

Agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vai ser uma função qualquer.
(7) Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, calcule $(f\circ)(ag + bh)$ e $a(f\circ)g + b(f\circ)h$. A operação $(f\circ)$ é linear? Porquê?
(8) Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, calcule $(\circ f)(ag + bh)$ e $a(\circ f)g + b(\circ f)h$. A operação $(\circ f)$ é linear? Porquê?

(9) Sabemos que $(D - 2)(D - 3)(e^{2x}) = 0$ e que $(D - 3)(D - 2)(e^{3x}) = 0$. Vimos em sala de aula que isto nos diz que as soluções de $f'' - 5f' + 6f = 0$ são da forma $f = ae^{2x} + be^{3x}$, mas ninguém consegue lembrar todos os detalhes desta demonstração da primeira vez 8-). Tente refazê-la e justificar claramente cada passo dela.
(10) Generalize: que funções f são soluções de $(D - \alpha)(D - \beta)(D - \gamma)f = 0$ quando α, β e γ são constantes reais diferentes?
(11) Calcule $(D - 1)^2(xe^x)$.
(12) Mostre que as funções da forma $f = ae^x + bxe^x$ são soluções de $f'' - 2f' + f = 0$.

(13) Verifique que $(D - 1)(e^{2x}) = e^{2x}$.
(14) Verifique que $(D - 1)(e^x) = 0$.
(15) Verifique que $(D - 1)(e^{2x} + ae^x) = e^{2x}$.
(16) Mostre que se $(D-\alpha)(D-\beta)g = h$ então $(D-\alpha)(D-\beta)(g+ae^{\alpha x}+be^{\beta x}) = h$.

Lembre que definimos em sala de aula uma operação

$$U(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

e vimos que ela era linear. Os primeiros exercícios abaixo são só pra você relembrar como ela funciona, os outros são novidade.

(17) Calcule $U(e^x)$, $U(e^{2x})$, $U(e^{ix})$, $U(e^{-ix})$, $U(e^{ix}+e^{-ix})$, $U(e^{ix}-e^{-ix})$, $U(\cos x)$, $U(\operatorname{sen} x)$.

(18) Calcule $U(a+bx+cx^2+dx^3)$.

O vetor $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ mora em $\mathbb{R}^3$, O vetor $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ mora em $\mathbb{R}^4$, etc. O resultado de $U(e^x)$ é um vetor de dimensão infinita, e ainda não temos um nome "oficial" para o espaço vetorial dos vetores de dimensão infinita com componentes reais... então vamos inventar um nome para este espaço agora: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (em outros cursos de Matemática ele vai receber outros nomes). A operação U vai de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vamos definir uma operação $W : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ assim:

$$\begin{aligned} W\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} &= a_0x^0 + a_1x^1 + \tfrac{a_2}{2}x^2 + \tfrac{a_3}{6}x^3 + \dots \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j!}x^j \end{aligned}$$

(19) Verifique que se f é um polinômio de grau 5 temos $W(U(f)) = f$. *Obs:* como é que você formaliza a idéia "f é um polinômio de grau 5"? Tente algo como: "f é da forma *[expressão]*, onde *blá*, ..., e *blá* são números reais".

(20) Verifique que se $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um vetor infinito que é "sempre 0 a partir da 5ª posição" (formalize isto!) temos $U(W(v)) = v$.

O melhor modo de resolver um problema como, por exemplo, "encontre uma solução de $f'' - 5f' + 6f = 0$ tal que $f(0) = 3$ e $f'(2) = 4$", é descobrir que f tem que ser da forma $ae^{2x} + be^{3x}$, definir uma transformação linear

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(2) \end{pmatrix}$$

e aí resolver:

$$T(ae^{2x} + be^{3x}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(21) Encontre uma solução de $f'' + f' - 2f = 0$ tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

(22) Encontre uma solução de $f'' + f' - 2f = 0$ tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

(23) Encontre uma solução de $f'' + f' - 2f = 0$ tal que $f(0) = 4$ e $f'(0) = 5$.