Cálculo 2 - 2010.1
Exercícios de preparação para VS extra
Versão preliminar - veja a data no rodapé
http://angg.twu.net/2010.1-C2.html

Esta lista de exercícios é sobre *como você pode encontrar e demonstrar as suas próprias formulas de integração*, e como escrever as suas demonstrações de um modo *confiável* e *claro*.

Pense que você está escrevendo para a sua tia, que sabe muito pouco sobre integração... ela, como qualquer pessoa sensata, sabe que essa história de Matemática é uma grande enganação: as pessoas escrevem fórmulas imponentes pra impressionar os outros e pra convencê-los de coisas que em geral são *falsas*. Ela — a sua tia — só acredita em "demonstrações" muito bem explicadas, nas quais ela entende cada passo e vê que cada passo é uma aplicação simples de uma das poucas regras que ela aceita. Ela fez o doutorado dela em Geometria Algébrica na década de 70 e desde que você tem 10 anos você tenta dizer pra ela: "tia, isso aqui é VERDADE! Tá no livro!!!", e ela te responde que as pessoas como você só dormem tranqüilas porque não sabem como são feitas as salsichas, as leis, os livros e as letras de Axé Music...

Antes de começar...

Encontre no seu livro de Cálculo uma tabela com as "regras satisfeitas por integrais definidas" (obs: no Thomas, 11ª ed., essa tabela está no capítulo "A integral definida", e as regras se chamam "ordem de integração", "integral de largura 0", "multiplicação por constante", "soma e diferença", "aditividade", "desigualdades max/min" e "dominação").

Em alguns dos exercícios você vai ter que mostrar como calcular certas integrais *usando apenas estas regras*, ou usando elas e o mínimo possível a mais, e *justificando cada igualdade* — ou seja, indicando que regra justifica cada '='.

Um exemplo: se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis, então pela regra do produto temos $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$; pela definição de primitiva, $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$; para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, pelo TFC2, $(f(x)g(x))|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$; pela regra da soma de integrais definidas, $\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx$, e reordenando os termos desta igualdade, $\int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx = (f(x)g(x))|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx$.

A sua tia não faz questão de que todas as justificativas sejam escritas em

Português. Pra ela isto aqui,

$$\begin{array}{rcl}
(f(x)g(x))' & \overset{\text{(r.prod)}}{=} & f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
f(x)g(x) & \overset{\text{(def prim)}}{=} & \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx \\
(f(x)g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & \overset{\text{(TFC2)}}{=} & \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx \\
 & \overset{\text{(soma)}}{=} & \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx & = & (f(x)g(x))\big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx
\end{array}$$

é tão aceitável quanto a explicação em Português do parágrafo anterior, e é visualmente mais claro.

(1) Digamos que a sua tia ainda não acredite na fórmula de integração por partes. Mostre, de um modo que seja convincente pra ela, que $\int_{x=a}^{x=b} xe^x\,dx = (xe^x)\big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} e^x\,dx$.

(2) Convença-a de que $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$. (Aqui você vai ter que ser BEM cuidadoso com o seu argumento — ela desconfia em dobro de qualquer argumento envolvento integrais indefinidas).

(3) Convença-a de que $\int_{x=a}^{x=b} f(x)g''(x)\,dx = (f(x)g'(x))\big|_{x=a}^{x=b} + (f'(x)g(x))\big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f''(x)g(x)\,dx$.

(4) Convença-a de que $\int_{x=2}^{x=3} \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=4}^{x=6} \operatorname{sen} x\,dx$.

Outra coisa: lembre da definição de "boa primitiva" do Malta/Pesco/Lopes — $F(x) = \int_{t=0}^{t=x} e^{2x}\,dt$ é uma primitiva para e^{2x}, mas não é uma "boa primitiva" porque ainda envolve o sinal de integral; $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 42$ é uma "boa primitiva" para e^{2x}. Em alguns (poucos) dos exercícios abaixo encontrar uma "primitiva" ("qualquer") vai ser suficiente; mas na maior parte deles você vai precisar encontrar uma "boa primitiva".

1 Regras inválidas

As "regras" abaixo são todas inválidas: elas valem em alguns casos, mas nem sempre, e uma "demonstração" que use qualquer uma destas regras provavelmente chega a conclusões erradas (obs: na década de 80, quando a sua tia dava aula na extinta Faculdade Federal da Ilha das Ostras, ela dava 0 numa prova imediatamente se encontrasse qualquer aplicação de uma "regra inválida" nos desenvolvimentos).

Mostre porque cada uma das "regras" abaixo é inválida.

(5) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
(6) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$
(7) $\cos(2x) = 2\cos x$
(8) $\sqrt{a^2} = a$
(9) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta) = \theta$
(10) $\frac{a}{b} - \frac{a}{2b} = \frac{a}{b}$
(11) $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$
(12) $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$

2 Definições por casos

Vou dizer que uma função f é *definida por casos (com n casos)* quando a sua definição é da forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{quando } x \in I_1 \\ f_2(x) & \text{quando } x \in I_2 \\ & \vdots \\ f_n(x) & \text{quando } x \in I_n \end{cases}$$

onde $I_1, I_2, \ldots, I_n$ são intervalos (disjuntos).

A função $|\cdot|$ tem uma definição por casos com dois casos; funções-escada e funções poligonais, que vimos bastante durante o curso, também são definidas por casos.

Vou dizer que uma definição por casos é *pura* quando as expressões para $f_1, \ldots, f_n$ não envolvem nenhuma função definida por casos. Por exemplo, esta definição não é pura:

$$g(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{quando } x \in (-\infty, 1) \\ |x-3| & \text{quando } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

(13) Faça o gráfico da g.
(14) Encontre uma definição por casos pura para a função g (você vai precisar de pelo menos 4 casos).
(15) Faço o gráfico de $g \circ g$.
(16) Encontre uma definição por casos pura para a função $g \circ g$.

Se f e g são definidas por casos e suas definições são puras, é fácil encontrar uma definição por casos pura para $f + g$: a gente primeiro aumenta o número de intervalos em cada uma das definições para que os intervalos fiquem iguais, depois soma as definições em cada intervalo.

(17) Faça o gráfico de $|x| + |x-2|$.
(18) Encontre uma definição por casos pura para $|x| + |x-2|$.
(19) Se

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{quando } x \in (-\infty, 0) \\ f_2(x) & \text{quando } x \in [0, 2) \\ f_3(x) & \text{quando } x \in [2, \infty) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{quando } x \in (-\infty, 1] \\ g_2(x) & \text{quando } x \in (1, 3] \\ g_3(x) & \text{quando } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

são definições por casos puras, encontre uma definição por casos pura para $f+g$.

(20) Mostre como calcular $\int_{x=-\pi}^{x=\pi} \operatorname{sen}|x|\,dx$.

3 Integrais de funções-escada

Agora seja f a função-escada dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in (-\infty, 1) \\ 1 & \text{quando } x \in [1, 4) \\ -2 & \text{quando } x \in [4, 5) \\ 0 & \text{quando } x \in [5, \infty) \end{cases}$$

(21) Mostre que $\int_{x=2}^{x=5} f(x) = 0\,dx$ usando apenas a definição da f e as "regras satisfeitas por integrais definidas".
(22) Encontre uma definição por casos pura para $F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$. (Obs: lembre da definição de "boa primitiva" do Malta/Pesco/Lopes!)
(23) Trace o gráfico de $y = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$.
(24) Encontre uma definição por casos pura para $y = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$.
(25) Encontre uma primitiva, F, para esta f (ou seja: $F(x) = \int f(x)\,dx$).
(26) Sejam:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{quando } x \in (-\infty, 0) \\ f_2(x) & \text{quando } x \in [0, 2) \\ f_3(x) & \text{quando } x \in [2, \infty) \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \begin{cases} \int_{t=0}^{t=x} f_1(x)\,dt & \text{quando } x \in (-\infty, 0) \\ \int_{t=0}^{t=x} f_2(x)\,dt & \text{quando } x \in [0, 2) \\ \int_{t=0}^{t=x} f_3(x)\,dt & \text{quando } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Mostre que a "regra" $F(x) = \int f(x)\,dx$ é inválida.