

Cálculo 2 - Terceira Prova (P3)  
 PURO-UFF - 2010.1  
 07/julho/2010  
 Prof: Eduardo Ochs

Todas as equações diferenciais (“E.D.s”) que vão aparecer nesta prova vão ser lineares com coeficientes constantes.

(1) (Total: 1.5 pontos). Mostre que a operação  $|\cdot| : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , definida por  $(|\cdot|f)(x) = |f(x)|$ , não é linear. (Obs:  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  é o conjunto das funções contínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ ; você pode ignorar a distinção entre  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ).

(2) (Total: 1.0 pontos). Mostre que a operação  $(D^2 - 2D + 1) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , definida por  $((D^2 - 2D + 1)f = f'' - 2f' + 1)$ , é linear.

(3) (Total: 2.0 pontos). Vimos que  $(D - 1)^2(xe^x) = 0$ . Encontre uma E.D. (que não seja  $0 = 0!$ ) que tenha  $xe^{2x}$  como uma de suas soluções e verifique que  $xe^{2x}$  é uma solução dela.

(4) (Total: 4.5 pontos). Para a E.D.  $f'' - \frac{9}{2}f' + 2f = 0$ :

- (0.5 pontos) encontre a sua solução geral,
- (0.5 pontos) encontre uma solução  $f$  tal que  $f(0) = 1$  e  $f'(0) = 0$ ,
- (0.5 pontos) encontre uma solução  $f$  tal que  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 1$ ,
- (0.5 pontos) encontre uma solução  $f$  tal que  $f(0) = 10$  e  $f'(0) = 7$ .
- (1.0 pontos) encontre uma função  $f$  da forma  $ax^2 + bx + c$  tal que  $f'' - \frac{9}{2}f' + 2f = x$ .
- (1.5 pontos) encontre a solução geral de  $f'' - \frac{9}{2}f' + 2f = x$ .

(5) (Total: 3.0 pontos). Lembre que definimos em sala a operação

$$U(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

e vimos que ela era linear.

- (1.0 pontos) Calcule  $U(\cos 3x)$ ,  $U(\sin 3x)$ ,  $U(e^{3ix})$ ,  $U(e^{-3ix})$ ,  $U(e^{-x})$ .
- (2.0 pontos) Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  são funções “boas” (você vai descobrir exatamente qual é o conjunto das funções “boas” num próximo curso; todas as funções de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  que aparecem nesta página são “boas”) então  $Uf = Ug \iff f = g$ . Além disso, se  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  então  $e^{(\alpha+\beta)x} = e^{\alpha x}e^{\beta x}$ . Use estes dois fatos e os vetores do item anterior pra provar que  $2e^{-x} \cos 3x = e^{(-1+3i)x} + e^{(-1-3i)x}$ .

As regras são as mesmas de sempre:

A prova é para ser feita em duas horas,  
sem consulta e sem calculadora.

Responda claramente e justifique cuidadosamente cada passo.

Lembre que a correção irá julgar o que você escreveu, e  
que é impossível ler o que você pensou mas não escreveu.

Lembre que a resposta esperada para cada questão não é só  
uma fórmula ou um número — a “resposta certa” é um  
raciocínio claro e convincente, com todos os detalhes  
necessários, mostrando que você sabe traduzir corretamente  
entre as várias linguagens (português, matematiqûês,  
diagramas, o que for) e explicando o que você está fazendo  
quando for preciso.

Você pode fazer perguntas ao professor durante a prova,  
mas não pode confiar nas respostas.

Cuidado: respostas parecidas demais com as de colegas  
podem fazer com que sua prova seja anulada!

Dica: *confira as suas respostas!*

**Boa prova!**

**Mini-gabarito:**

Questão 1 (total: 1.5 pontos):

$$(| \cdot |)(x + (-x)) = (| \cdot |)0 = 0$$

$$(| \cdot |)x + (| \cdot |)(-x) = 2|x|$$

Questão 2 (total: 1.0 pontos):

$$(D^2 - 2D + 1)(ag) = (ag)'' - 2(ag)' + (ag) = ag'' - 2ag' + ag = a(D^2 - 2D + 1)g$$

$$(D^2 - 2D + 1)(g+h) = (g+h)'' - 2(g+h)' + (g+h) = g'' + h'' - 2g' - 2h' + g + h =$$

$$(D^2 - 2D + 1)(g) + (D^2 - 2D + 1)(h)$$

Questão 3 (total: 2.0 pontos):

$$(D - 2)(D - 2)(xe^{2x}) = (D - 2)(e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x}) = (D - 2)e^{2x} = 0$$

Questão 4 (total: 4.5 pontos):

$$(A \text{ equação é } (D^2 - \frac{9}{2}D + 2)f = 0)$$

$$4a \text{ (0.5): } f = ae^{4x} + be^{\frac{1}{2}x}$$

$$4b \text{ (0.5): Se } f = -\frac{1}{7}e^{4x} + \frac{8}{7}e^{\frac{1}{2}x} \text{ então } f(0) = 1 \text{ e } f'(0) = 0$$

$$4c \text{ (0.5): Se } f = \frac{2}{7}e^{4x} - \frac{2}{7}e^{\frac{1}{2}x} \text{ então } f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 1$$

$$4d \text{ (0.5): Se } f = \frac{-10+14}{7}e^{4x} + \frac{80-14}{7}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{4}{7}e^{4x} + \frac{66}{7}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{então } f(0) = 10 \text{ e } f'(0) = 7$$

$$4e \text{ (1.0): Se } f = \frac{x}{2} - \frac{9}{4} \text{ então } (D^2 - \frac{9}{2}D + 2)f = x$$

$$4f \text{ (1.5): } f = ae^{4x} + be^{\frac{1}{2}x} + \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$$

Questão 5 (total: 3.0 pontos):

5a (1.0):

$$5b \text{ (2.0): } 2e^{-x} \cos 3x = 2e^{-x}(e^{3ix} + e^{-3ix}) = 2e^{-x}e^{3ix} + e^{-x}e^{-3ix}$$

$$= e^{(-1+3i)x} + e^{(-1-3i)x}$$