

Cálculo 2 - Prova Suplementar (VS)
 PURO-UFF - 2010.1
 14/julho/2010
 Prof: Eduardo Ochs

(1) (Total: 3.0 pontos). Calcule $\int x^{3/2} \cos \sqrt{x} dx$ e confira sua resposta.

(2) (Total: 4.0 pontos). Sejam:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \frac{\pi}{2}x, \\ g(x) &= \cos \frac{\pi}{2}x, \\ h(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{quando } x \leq 1, \\ g(x) & \text{quando } x \in (1, 2), \\ 2f(x) & \text{quando } x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

- a) (0.5 pontos) Faça o gráfico de $h(x)$.
 b) (2.0 pontos) Encontre uma primitiva $H(x) = \int h(x) dx$.
 c) (1.5 pontos) Faça o gráfico de $H(x)$.

(3) (Total: 3.0 pontos). Calcule

$$\int \frac{1}{x\sqrt{25x^2 + 16}} dx$$

e confira sua resposta.

As regras são as mesmas de sempre:

A prova é para ser feita em duas horas,
 sem consulta e sem calculadora.

Responda claramente e justifique cuidadosamente cada passo.

Lembre que a correção irá julgar o que você escreveu, e
 que é impossível ler o que você pensou mas não escreveu.

Lembre que a resposta esperada para cada questão não é só
 uma fórmula ou um número — a “resposta certa” é um

raciocínio claro e convincente, com todos os detalhes
 necessários, mostrando que você sabe traduzir corretamente
 entre as várias linguagens (português, matematiqûês,
 diagramas, o que for) e explicando o que você está fazendo
 quando for preciso.

Você pode fazer perguntas ao professor durante a prova,
 mas não pode confiar nas respostas.

Cuidado: respostas parecidas demais com as de colegas
 podem fazer com que sua prova seja anulada!

Dica: *confira as suas respostas!*

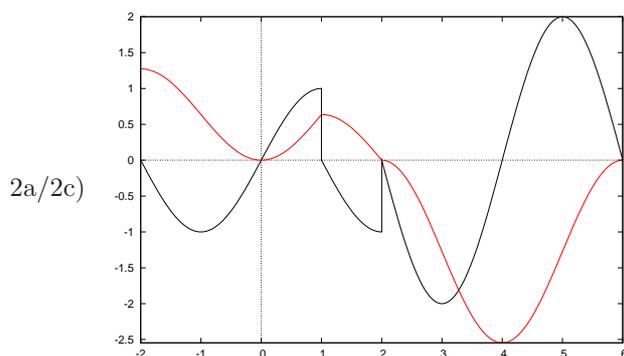
Boa prova!

Mini-gabarito:

1) Fazendo $\theta = \sqrt{x}$, $f(\theta) = \theta^4$, $g''''(\theta) = g(\theta) = \cos \theta$, $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$,

$$\begin{aligned} \int x^{3/2} \cos \sqrt{x} dx &= \left[\frac{\sqrt{x}=\theta}{dx=2\theta d\theta} \right] \int (\theta^3 \cos \theta) \theta d\theta \\ \int f g'''' d\theta &= f g'''' - f' g''' + f'' g'' - f''' g' + \int f'''' g d\theta \\ \int f c'''' d\theta &= f c'''' - f' c''' + f'' c'' - f''' c' + \int f'''' c d\theta \\ \int f c d\theta &= f s + f' c - f'' s - f''' c + \int f'''' c d\theta \\ \int \theta^4 c d\theta &= \theta^4 s + 4\theta^3 c - 12\theta^2 s - 24\theta c + \int 24c d\theta \\ &= (\theta^4 - 12\theta^2 + 24)s + (4\theta^3 - 24\theta)c \\ &= (\theta^4 - 12\theta^2 + 24)s + (4\theta^2 - 24)\theta c \\ &= (x^2 - 12x + 24) \sin \sqrt{x} + (4x - 24)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} \\ \int x^{3/2} \cos \sqrt{x} dx &= 2(x^2 - 12x + 24) \sin \sqrt{x} + 2(4x - 24)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (2(x^2 - 12x + 24) \sin \sqrt{x} + 2(4x - 24)\sqrt{x} \cos \sqrt{x}) \\ &= 2(2x - 12) \sin \sqrt{x} + 8\sqrt{x} \cos \sqrt{x} \\ &\quad + 2(x^2 - 12x + 24) (\cos \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &\quad + 2(4x - 24) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \sqrt{x} (\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$



$$2b) \int h(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}x) & \text{quando } x \leq 1, \\ \frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{quando } x \in (1, 2), \\ -\frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}x) & \text{quando } x \geq 2. \end{cases}$$

3) Se $t = \frac{5}{4}x$ então $\sqrt{25x^2 + 16} = 4\sqrt{\frac{25}{16}x^2 + 1} = 4\sqrt{t^2 + 1}$, e:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{25x^2+16}} dx &= \left[\frac{x=\frac{4}{5}t}{dx=\frac{4}{5}dt} \right] \int \frac{1}{\frac{4}{5}t \cdot 4\sqrt{t^2+1}} \frac{4}{5} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \left[\frac{t=\tan \theta}{\sqrt{1+t^2}=\sec \theta} \right] \frac{1}{4} \int \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \dots \end{aligned}$$