Cálculo 2 - Prova Suplementar Extra (VS2a)
PURO-UFF - 2010.1
28/julho/2010
Prof: Eduardo Ochs

(1) (Total: 5.0 pontos). Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \leq 0 \\ 2-2x & \text{quando } x \in (0,1] \\ 4-2x & \text{quando } x \in (1,2] \\ 0 & \text{quando } x > 2 \end{cases}$$

Encontre uma primitiva F para a função f, faça o gráfico de f e F e mostre — de um modo que convença a sua tia — que para todos os valores para $a, b \in \mathbb{R}$ temos $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

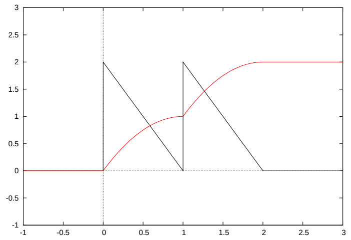
(2) (Total: 5.0 pontos). Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer de duas variáveis, contínua. Mostre, de um modo que convença a sua tia, que para quaisquer $\theta_0, \theta_1 \in [-\pi/2, \pi/2]$, temos:

$$\int_{s=\operatorname{sen}\theta_0}^{s=\operatorname{sen}\theta_1} F(s, \sqrt{1-s^2})\,ds = \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} F(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\cos\theta\,d\theta$$

Lembre que a sua tia não acredita na fórmula de substituição de variáveis.

Dica: provavelmente você vai achar muito difícil provar direto o caso geral... então você pode começar com uma F específica — por exemplo $F(s,c) = s^4c^6$ — e depois tentar generalizar.

Mini-gabarito (incompleto por enquanto):

1) 

2) Usando só o TFC 2, podemos ver que:

$$\begin{aligned}\int_{s=h(\theta_0)}^{s=h(\theta_1)} g'(s)\,ds &= [g(s)]_{s=h(\theta_0)}^{s=h(\theta_1)} \\ &= [g(h(\theta))]_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} \\ &= \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} g'(h(\theta))h'(\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

Fazendo $g'(s) = F(s, \sqrt{1-s^2})$ e $h(\theta) = \operatorname{sen}\theta$, temos:

$$\int_{s=\operatorname{sen}(\theta_0)}^{s=\operatorname{sen}(\theta_1)} F(s, \sqrt{1-s^2})\,ds = \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} F(\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta})\,\cos\theta\,d\theta$$

mas $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$ se e só se $\cos\theta \geq 0$... a restrição de que tanto θ_0 quanto θ_1 pertencem ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ garante que $\cos\theta \geq 0$, e que portanto a fórmula que queríamos demonstrar é válida.