Matemática Discreta - 2010jul13
Exercícios de preparação para VS extra -
versão preliminar

Uma das idéias cruciais de Matemática Discreta — e que não é explicada claramente no livro do Scheinerman — é a idéia de *redução*: uma seqüência (válida) de reduções nos dá um modo de calcular o valor de uma expressão. Nós denotamos "α pode ser reduzido a β (em um passo)" por $\alpha \rightsquigarrow \beta$. Por exemplo, para calcularmos o valor de $2\cdot3+4\cdot5$ nós seguimos qualquer uma das seqüências de redução no diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd}
2\cdot3+4\cdot5 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & 2\cdot3+20 \arrow[d, squiggly] & \\
6+4\cdot5 \arrow[r, squiggly] & 6+20 \arrow[r, squiggly] & 26
\end{tikzcd}$$

Podemos marcar as "subexpressões" da expressão original, $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$, sublinhando-as:

$$\underline{\underline{\underline{2}\cdot\underline{3}}+\underline{\underline{4}\cdot\underline{5}}}$$

Vamos interpretar estes sublinhados como uma espécie de parênteses — o primeiro significado que vamos dar para eles vai ser que eles vão nos dizer como calcular o valor de uma expressão maior a partir de expressões menores. Por exemplo, em $\underline{\underline{\underline{2}\cdot\underline{3}}+\underline{\underline{4}\cdot\underline{5}}}$ eles dizem que para calcularmos o valor de $2\cdot3+4\cdot5$ temos que primeiro calcular os valores de $2\cdot3$ e $4\cdot5$ e depois somar os resultados.

Repare que podemos aumentar o diagrama anterior incluindo seqüências de reduções *erradas*, que dão resultados errados:

$$\begin{tikzcd}
 & & 2\cdot3+4\cdot5 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] \arrow[dl, dotted] & 2\cdot3+20 \arrow[r, dotted] \arrow[d, squiggly] & 2\cdot23 \arrow[r, squiggly] & 46 \\
14\cdot5 \arrow[d, squiggly] & 2\cdot7\cdot5 \arrow[l, squiggly] \arrow[d, squiggly] & 6+4\cdot5 \arrow[r, squiggly] \arrow[d, dotted] & 6+20 \arrow[r, squiggly] & 26 & \\
70 & 2\cdot35 \arrow[l, squiggly] & 10\cdot5 \arrow[rr, squiggly] & & 50 &
\end{tikzcd}$$

(1) Encontre um modo de converter entre sublinhados e seqüências de reduções. Quais são as seqüências de reduções (isto é, caminhos no diagrama acima) correspondentes a $\underline{\underline{\underline{2}\cdot\underline{\underline{3}+\underline{4}}}\cdot\underline{5}}$ e $\underline{\underline{2}\cdot\underline{\underline{\underline{3}+\underline{4}}\cdot\underline{5}}}$? Os dois caminhos correspondentes a $\underline{\underline{\underline{2}\cdot\underline{3}}+\underline{4}\cdot\underline{5}}$ dão o mesmo resultado?

(2) Podemos considerar que cada "+" no diagrama acima representa um "8", cada "$\cdot$" representa um "9" (como na P1), e que $\alpha \rightsquigarrow \beta$ quer dizer $\alpha R \beta$ e $\alpha \dashrightarrow \beta$ quer dizer $\alpha S \beta$; então $S = \{(2839485, 28785), (283920, 2823), (69485, 1085)\} \subset \mathbb{N}^2$. Escreva $R \subset \mathbb{N}^2$ como conjunto.

(3) Reescreva o diagrama acima trocando os '$\cdot$'s e '+'s por '8's e '9's e use-o para representar o fecho transitivo de R (vamos chamar o fecho transitivo de "R^+"). Sugestão: use um terceiro tipo de seta, $\alpha \to \beta$, para representar os pares que só pertencem a R^+.
(4) $R^+\backslash R$ é um conjunto de pares, e portanto uma relação. $28785(R^+\backslash R)70$ é verdade? E $28785(R^+\backslash R)2835$?

Releia a seção 1.5 do Hopcroft/Ullman/Motwani (esta seção se chama "The Central Concepts of Automata Theory" na edição em Inglês).

Na seção 1.5 do Hopcroft/Ullman/Motwani aparecem as noções de *alfabeto* e de *palavra*. Se Σ é um alfabeto, então Σ^+ é o conjunto das palavras de comprimento ≥ 1 formadas por "letras" de Σ, e Σ^* é o conjunto das palavras de comprimento ≥ 0 formadas por letras de Σ. Se $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, então $\mathbb{N} \subset \Sigma^+$, mas Σ^+ tem palavras que parecem com números naturais escritos errado — por exemplo, 04321. Em Σ^* temos uma operação de concatenação que é bem parecida com o "$+\!\!+$" que usamos no curso; Σ^* é um monóide, o seu elemento neutro é a palavra de comprimento 0, que o H/U/M denota por ϵ. Ele escreve a concatenação "direto" (mais formalmente: "por justaposição") — $\alpha\beta$ ao invés de $\alpha +\!\!+ \beta$.
(5) Se $\Sigma = \{4, 5\}$, calcule Σ^2, $\Sigma^2 \cup \Sigma^1$, $\Sigma^2 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^0$.
(6) Encarando 004 como um elemento de Σ^*, calcule 004^3 e 004^0.
(7) Seja $A = \{004, 5\} \subset \Sigma^*$. Calcule A^2.

Vamos aumentar o nosso alfabeto um pouco. A partir de agora Σ vai ser:

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, \cdot, N, M, A\}$$

e as relações R e S da página anterior vão passar a ser $R, S \subseteq (\Sigma^*)^2$. *Com isto não vamos mais precisar trocar '$\cdot$'s e '+'s por '8's e '9's.*

Vou definir uma relação nova, T, sobre Σ^*, assim: xTy vai ser verdade se e só se existem $\alpha, \beta, \beta', \gamma \in \Sigma^*$ tais que $x = \alpha\beta\gamma$, $x = \alpha\beta'\gamma$, e β e β' obedecem alguma das condições (i)–(iv) abaixo:
(i) $\beta = N$ e $\beta' \in \mathbb{N}$ (lembre que $\mathbb{N} \subset \Sigma^*$)
(ii) $\beta = M$ e $\beta' = N$
(iii) $\beta = M$ e $\beta' = M \cdot M$
(iv) $\beta = A$ e $\beta' = M$
(v) $\beta = A$ e $\beta' = A + A$

Por exemplo, $(2 + M + 7)T(2 + M \cdot M + 7)$ é verdade — pela condição (iii), com $\alpha = 2+$, $\beta = M$, $\beta' = M \cdot M$, $\gamma = +7$.
(8) Vamos escrever xTy como $x \Rightarrow y$. Para cada uma das setas do diagrama abaixo justifique porque xTy é verdade, dizendo qual das regras (i)–(v) for utilizada e quem era α, β, β', γ.
(9) Pelo diagrama abaixo dá pra ver que $(A)T^*(A+N\cdot 5)$. Mostre que $(A)T^*(2\cdot 3 + 4 \cdot 5)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & M{+}N{\cdot}5 & A{+}N{\cdot}5 \arrow[l, Rightarrow] & \\
 & & & M{+}N{\cdot}N \arrow[u, Rightarrow] & A{+}N{\cdot}N \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & & M{+}M{\cdot}N \arrow[u, Rightarrow] & A{+}M{\cdot}N \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & M{\cdot}M{+}M{\cdot}M & M{+}M{\cdot}M \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & A{+}M{\cdot}M \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & \\
2{\cdot}M{+}M & N{\cdot}M{+}M \arrow[l, Rightarrow] & M{\cdot}M{+}M \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & M{+}M \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & A{+}M \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & \\
2{\cdot}M{+}A \arrow[u, Rightarrow] & N{\cdot}M{+}A \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & M{\cdot}M{+}A \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & M{+}A \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & A{+}A \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & A \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

(10) Podemos usar os sublinhados pra indicar "de onde vem cada subexpressão" de uma palavra como $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$, e podemos usar

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{2}} \cdot \underline{\underline{3}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{4}} \cdot \underline{\underline{5}}}}}$$

como abreviação para:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2}_N}_M \cdot \underbrace{\underbrace{3}_N}_M}_M}_A + \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{4}_N}_M \cdot \underbrace{\underbrace{5}_N}_M}_M}_A}_A$$

A partir destes diagrama com chaves — vamos chamá-los de *árvores de parsing* — é fácil ver como obter uma série de "substituições" (cada $x \Rightarrow y$ é uma substituição de uma letra por uma outra letra ou por uma expressão um pouco maior) que mostram que $(A)T(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5)$ é verdade.

Qualquer linguagem de programação usa idéias parecidas com as que acabamos de ver para entender expressões e descobrir como interpretá-las (você vai ver tudo isto em detalhes daqui a alguns períodos, no curso de Linguagens Formais).

(11) Tente encontrar uma árvore de parsing que mostra que $MT^*(3 + 4)$. Porque você não consegue?

(12) Tente encontrar uma árvore de parsing que mostra que $AT^*(3+)$. Porque você não consegue?

(13) Tente encontrar uma árvore de parsing para $AT^*(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5)$ na qual um dos sublinhados esteja nesta posição: $2 \cdot \underline{3 +} 4 \cdot 5$. Porque você não consegue?

(14) Tente encontrar uma árvore de parsing para $AT^*(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5)$ na qual um dos sublinhados esteja nesta posição: $2 \cdot \underline{3 + 4} \cdot 5$. Porque você não consegue?

(15) Encontre duas árvores de parsing diferentes para $6 \cdot 7 \cdot 8$, uma com sublinhados nestas posições, $\underline{\underline{6 \cdot 7} \cdot 8}$, e outra com sublinhados nestas: $\underline{6 \cdot \underline{7 \cdot 8}}$.

Se MT^*x, vamos dizer que x é uma *expressão multiplicativa*;
se AT^*x, vamos dizer que x é uma *expressão aditiva*.

(16) Pegue algumas expressões em C e tente marcá-las com sublinhados do modo que você imagina que o C faça. Como você acha que o C parseia `3+16-4-2+5`? E `16/4/-2`? E `2+3+4+5`? E `a=4-b=c+5`?

Podemos usar a idéia de subexpressões para nos ajudar a entender **todos** os tipos de expressões em matematiquês que apareceram no curso. Por exemplo:

$$\underline{\forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \underline{A}.\ \underline{\underline{\underline{\underline{a}\,\underline{R}\,\underline{b}} \land \underline{\underline{b}\,\underline{R}\,\underline{c}}} \to \underline{\underline{a}\,\underline{R}\,\underline{c}}}}$$

onde o a, o b e o c no '$\forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \underline{A}$' são *nomes de variáveis* (lembre que coisas como '$\exists 2 \in \mathbb{N}$' e '$\forall \{2,3\} \subset \mathbb{N}$' são inadmissíveis, são erros conceituais gravíssimos, e que pessoas que escreveram coisas assim apesar de todos os avisos mereciam ter suas provas anuladas... vou dar mais detalhes sobre "nomes de variáveis" na próxima versão da lista).

(17) Digamos que $A = \{1,2,3,4\} \subset \mathbb{N}$. Identifique quais das subexpressões de

$$\underline{\forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \underline{A}.\ \underline{\underline{\underline{\underline{a}\,\underline{R}\,\underline{b}} \land \underline{\underline{b}\,\underline{R}\,\underline{c}}} \to \underline{\underline{a}\,\underline{R}\,\underline{c}}}}$$

têm valores que são números, quais têm valores que são conjuntos, quais têm valores que são valores de verdade, etc.

(18) Faça o mesmo para todas as subexpressões das expressões em matematiquês que aparecem nos enunciados da P3. *Anote todas as suas dúvidas e discuta-as com seus colegas.*

Digamos que $B \subset \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; temos 1024 '$B$'s possíveis. Vamos nos restringir aos 'B's que obedecem as condições abaixo:
(i) $B \subset \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,
(ii) $3 \in B$,
(iii) $(0 \in B \to 3 \in B) \land (1 \in B \to 4 \in B) \land (2 \in B \to 5 \in B) \land (3 \in B \to 6 \in B) \land (4 \in B \to 7 \in B) \land (5 \in B \to 8 \in B) \land (6 \in B \to 9 \in B)$.

(19) Encontre três valores para B diferentes que obedeçam as condições (i), (ii), (iii) acima.

Dizemos que um número n "é da forma $4k+1$" quando existe um valor para $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 4k+1$. Os inteiros 5, 21 e -7 são da forma $4k+1$; os números 2, $\frac{3}{4}$ e π não são. Expressões como "xxx da forma blá" são muito comuns em linguagem matemática. A proposição $1 > 2 \land 2 > 0 \to 1 > 0$ "é da forma $P \to Q$" (para $P = (1 > 2 \land 2 > 0)$ e $Q = (1 > 0)$); a proposição $\forall x \in A. x = 2 \land x = 3$ não é da forma $P \land Q$, mas contém uma subexpressão da forma $P \land Q$.

Temos muitos modos diferentes de escrever a prova de que se B obedece as condições (i), (ii) e (iii) acima, então $9 \in B$. Vamos ver alguns modos (mais precisamente: alguns “sistemas dedutivos”) nos quais podemos caracterizar precisamente o que é uma prova e o que não é, usando a idéia de que cada passo tem que ser de uma das poucas formas permitidas. Como a definição *precisa* de “sistema dedutiva” é difícil (porque é geral demais), vamos começar com alguns exemplos.

A árvore abaixo é uma prova de $9 \in B$ num sistema dedutivo chamado “dedução natural”:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(ii)}{3 \in B} \quad \dfrac{(iii)}{3 \in B \to 6 \in B}}{6 \in B}\,MP \quad \dfrac{(iii)}{6 \in B \to 9 \in B}}{9 \in B}\,MP$$

Cada barra dela é de uma destas formas:

$$\dfrac{(ii)}{3 \in B} \qquad \dfrac{(iii)}{0 \in B \to 3 \in B} \quad \dfrac{(iii)}{1 \in B \to 4 \in B} \quad \dfrac{(iii)}{2 \in B \to 5 \in B}$$

$$\dfrac{(iii)}{3 \in B \to 6 \in B} \quad \dfrac{(iii)}{4 \in B \to 7 \in B} \quad \dfrac{(iii)}{5 \in B \to 8 \in B}$$

$$\dfrac{(iii)}{6 \in B \to 9 \in B} \qquad \dfrac{P \quad P \to Q}{Q}\,MP$$