Matemática Discreta - Primeira Prova (P1)
PURO-UFF - 2010.1
12/abril/2010
Prof: Eduardo Ochs
Aluno: **Fulano de Tal**
Matrícula: **123456789-0**
Posição: **P99**

Seqüências infinitas podem ser vistas como listas infinitas, e podem ser definidas "indutivamente". Por exemplo, a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (1, 2, 4, 8, \ldots)$ pode ser definida por duas condições: $a_0 = 1$ e $\forall n \in \mathbb{N}.a_{n+1} = 2a_n$ — se expandimos $\forall n \in \mathbb{N}.a_{n+1} = 2a_n$ obtemos $a_1 = 2a_0$, $a_2 = 2a_1$, etc, e com isto podemos calcular o valor de cada um dos 'a_n's.

Além disso, podemos definir em matematiquês um "if" parecido com os de linguagens de programação usando uma função de três argumentos, com as seguintes regras de redução:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{if}(\mathbf{V}, a, b) & \rightsquigarrow & a \\ \mathsf{if}(\mathbf{F}, a, b) & \rightsquigarrow & b \end{array}$$

Então, por exemplo:

$$\begin{array}{l} \mathsf{if}((2 < 4), 2, 4) \rightsquigarrow \mathsf{if}(\mathbf{V}, 2, 4) \rightsquigarrow 2 \\ \mathsf{if}((99 < 9), 99, 9) \rightsquigarrow \mathsf{if}(\mathbf{F}, 99, 9) \rightsquigarrow 9 \end{array}$$

e podemos definir $\mathsf{min}(a, b) = \mathsf{if}((a < b), a, b)$.

Se consideramos cada número $n \in \mathbb{N}$ como uma seqüência de caracteres começando pelo dígito mais significativo de n — o 123 como "123", o 4 como "4", 1000 como "1000", e o 0 como "" —, podemos definir uma operação, $+\!\!+$, que "concatena os dígitos de dois números": $1000 +\!\!+ 123 = 1000123$, $4 +\!\!+ 22 +\!\!+ 0 = 422$, etc. Na questão 3 você vai ter que usar esta operação informalmente, e na questão 4 você vai ter que encontrar uma definição formal para ela.

(1) (0.5 pontos). Digamos que a seqüência $(d_0, d_1, d_2, \ldots)$ obedece

$$d_0 = 0 \land (\forall n \in \mathbb{N}.d_{n+1} = 10d_n + 9).$$

Calcule d_1, d_2, d_3, d_4.

(2) (2.0 pontos). Use a função 'if' para definir formalmente uma seqüência $(k_0, k_1, k_2, \ldots) = (0, 9, \ldots, 9, 99, \ldots, 99, 999, \ldots, 999, \ldots)$ tal que $k_1 = 9$, $k_9 = 9$, $k_{10} = 99$, $k_{99} = 99$, $k_{100} = 999$, etc; mostre que a sua definição funciona.

(3) (2.5 pontos). A seqüência de conjuntos $(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ é definida por:

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & \{2\} \\ A_{n+1} & = & A_n \cup \\ & & \{\, 1 \mathbin{++} a \mathbin{++} 4 \mid a \in A_n \,\} \cup \\ & & \{\, a \mathbin{++} 3 \mathbin{++} b \mid a \in A_n, b \in A_n \,\}. \end{array}$$

Calcule A_1 e A_2.

(4) (2.0 pontos). Use a seqüência dos 'k_n's da questão 2 para definir formalmente $a \mathbin{++} b$.

(5) (4.0 pontos). Considere a relação $R \subseteq A_1 \times A_2$ definida por: aRc se e só se

$$(1 \mathbin{++} a \mathbin{++} 4 = c) \vee (\exists b \in A_1 . (a \mathbin{++} 3 \mathbin{++} b = c)).$$

Represente R como conjunto e graficamente. R é uma função? E R^{-1}?

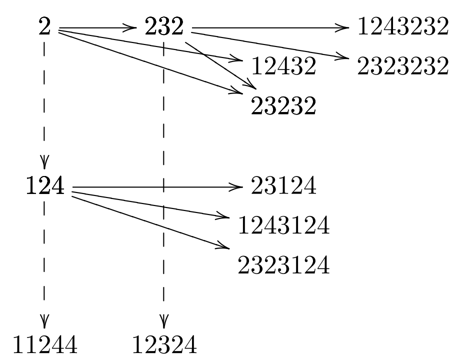
A prova é para ser feita em duas horas, sem consulta.
Responda claramente e justifique cada passo.
Lembre que a correção irá julgar o que você escreveu, e
que é impossível ler o que você pensou mas não escreveu.
Lembre que a resposta esperada para cada questão não é só
uma fórmula ou um número — a "resposta certa" é um
raciocínio claro e convincente, com todos os detalhes
necessários, mostrando que você sabe traduzir corretamente
entre as várias linguagens (português, diagramas,
matematiquês, etc) e explicando o que você está fazendo
quando for preciso.
Você pode fazer perguntas ao professor durante a prova,
mas não pode confiar nas respostas.
Cuidado: respostas parecidas demais com as de colegas
podem fazer com que sua prova seja anulada!
Dica: *confira as suas respostas!*

Boa prova!

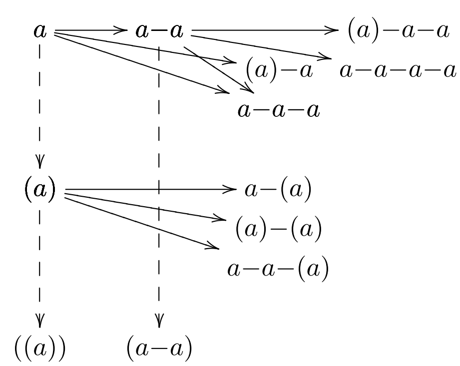
Mini-gabarito:
1) $d_1 = 9$, $d_2 = 99$, $d_3 = 999$, $d_4 = 9999$
2) $k_0 = 0 \land k_{n+1} = \mathsf{if}((n = k_n), 10k_n + 9, k_n)$
3)

$$\begin{array}{rcl}
A_1 & = & \{2, 124, 232\} \\
A_2 & = & \{2, 124, 232\} \cup \\
 & & \{124, 11244, 12324\} \cup \\
 & & \{2 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 2, 2 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 124, 2 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 232, \\
 & & 124 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 2, 124 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 124, 124 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 232, \\
 & & 232 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 2, 232 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 124, 232 \mathbin{+\!\!+} 3 \mathbin{+\!\!+} 232\} \\
 & = & \{2, 124, 232, \\
 & & 11244, 12324, 12432, 23124, 23232, \\
 & & 1243124, 1243232, 2323124, 2323232\}
\end{array}$$

4) $a \mathbin{+\!\!+} b = a \cdot (k_b + 1) + b$
5)



R não é uma função porque $2R124$ e $2R232$.
R^{-1} não é uma função porque $23232R^{-1}2$ e $23232R^{-1}232$.



17 de maio de 2010
Matemática Discreta -
Exercício/problema/problemão

Considere a seguinte tradução entre números e expressões, parecida com a da questão 5 da prova: o conjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}$ vai ser o conjunto dos "números que representam expressões lógicas formadas só por P, Q, R, $\wedge$, $\to$, $\neg$, (,)". Por exemplo: "$(P \wedge Q) \to \neg R$" vai ser representado por 71428563 ('('=7, 'P'=1, etc).

Além disso, o conjunto $W = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \subset \mathbb{N}$ vai ser o "conjunto dos valores possíveis para P, Q e R", encodificados da seguinte forma: o dígito das centenas diz se P é verdadeiro ou falso (1=verdadeiro, 0=falso); o dígito das dezenas diz se Q é verdadeiro ou falso, e o dígito das unidades diz se R é verdadeiro ou falso.

1) Treine a tradução entre $\mathbb{S}$ e expressões lógicas, e encontre um número que não pertence a $\mathbb{S}$ (porque a tradução dele para expressões lógicas gera algo que não faz sentido, isto é, "não compila").

A partir de agora vamos usar só as representações como strings.

2) Qual é o valor da expressão "$(P \wedge Q) \to R$" no mundo "101"?

3) Em que mundos as expressões "P", "$P \wedge Q$", "Q", "$Q \to R$", "$\neg R$" são verdadeiras? Para cada uma destas expressões faça uma cópia do cubo abaixo,

```
    111
   / | \
011 101 110
 | X   X |
001 010 100
   \ | /
    000
```

e envolva ou sublinhe os mundos nos quais ela é verdadeira.

4) Numa das últimas aulas provamos algo como

$$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$$

supondo primeiro que $(P \to Q)$ e $(Q \to R)$ eram verdade ao mesmo tempo (obs: em que mundos isto acontece?), e aí tentando provar $P \to R$; depois adicionamos uma hipótese, P, e passamos a tentar provar que R é verdade nos mundos que obedecem as hipóteses $(P \to Q)$, $(Q \to R)$, e P. *Encontre um modo de representar tudo isto usando subconjuntos dos vértices do cubo.*

5) Na última aula provamos algo como

$$((P \wedge Q) \wedge \neg P) \to R$$

por contradição; reconstrua a prova, e interprete-a usando o cubo.