Matemática Discreta - Prova Suplementar (VS)
PURO-UFF - 2010.1
14/julho/2010
Prof: Eduardo Ochs

(1) (Total: 2.0 pontos). Prove ou refute: se A, A', B, B' são conjuntos e se $A \subseteq A'$ e $B \subseteq B'$ então $A \times B \subseteq A' \times B'$.

(2) (Total: 2.0 pontos). Prove ou refute: $\forall d, d', n \in \mathbb{Z}.\ d|n \land d'|n \to dd'|n$.

(3) (Total: 7.0 pontos). Prove ou refute: se A, B, C, D são conjuntos e $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$ então:

a) $|D \to A| \leq |D \to B|$
b) $|D \to B| \leq |C \to B|$
c) Existe uma função $f : (D \to A) \to (D \to B)$
d) Existe uma função $f : (D \to B) \to (C \to B)$
e) $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(D)$
f) $\mathcal{P}(D) \subseteq \mathcal{P}(C)$
g) Existem bijeções entre os conjuntos $\mathcal{P}(D)$, $(D \to \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\})$, $(D \to \{0, 1\})$.

(1.0 ponto cada item)

1 (2.0): Queremos provar que cada elemento de $A \times B$ pertence a $A' \times B'$. Como cada elemento de $A \times B$ é um par ordenado (a, b), basta provar que todo par (a, b) que pertence a $A \times B$ pertence a $A' \times B'$. Se $(a, b) \in A \times B$ então $a \in A$ e $b \in B$; como $A \subseteq A'$ e $B \subseteq B'$ então $a \in A'$ e $b \in B'$, e portanto $(a, b) \in A' \times B'$.

2 (2.0): Se $d = 2$, $d' = 2$ e $n = 2$, então $d|n \land d'|n \to dd'|n$ é falso.

3a (1.0): Verdadeiro: Como $A \subseteq B$ então $|A| \leq |B|$, e
$|D \to A| = |A^D| = |A|^{|D|} \leq |B|^{|D|} = |B^D| = |D \to B|$.

3b (1.0): Falso: se $|A| = 1$, $|B| = 2$, $|C| = 3$, $|D| = 4$ então
$|D \to B| = |B^D| = |B|^{|D|} = 2^4 > 2^3 = |B|^{|C|} = |B^C| = |C \to B|$.

3c (1.0): Verdadeiro: $f(g) = g; i$, onde $i : A \to B$ é a inclusão.

3d (1.0): Verdadeiro: $f(h) = i'; h$, onde $i' : C \to D$ é a inclusão.

3e (1.0): Verdadeiro: $C' \in \mathcal{P}(C) \to C' \subseteq C \to C' \subseteq D \to C' \in \mathcal{P}(D)$.

3f (1.0): Falso. Se $C = \{1\}$ e $D = \{1, 2\}$ então $D \in \mathcal{P}(D)$ mas $D \notin \mathcal{P}(C)$.

3g (1.0): Verdadeiro (detalhes depois).