Geometria Analítica - Prova suplementar (VS)
PURO-UFF - 2014.2
13/jun/2014
Prof: Eduardo Ochs

Vamos usar a notação $\begin{bmatrix} a \\ b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ tanto para o polinômio $ay^2+by+cxy+d+ex+fx^2$ quanto para o conjunto dos pontos (x,y) em $\mathbb{R}^2$ nos quais ele é zero. Um polinômio $\begin{bmatrix} a \\ b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ é *homogêneo* (de grau 2) se $b=d=e=0$. Dada uma cônica $\begin{bmatrix} a \\ b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, a *cônica homogênea associada* a ela é $\begin{bmatrix} a \\ 0 & c \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$, e o seu *discriminante* é c^2-4af. Além disto, o *centro* de uma cônica $F(x,y) = \begin{bmatrix} a \\ b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ é o ponto onde $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ c & 0 \\ e & 2f & 0 \end{bmatrix} = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} = 0$ (se este ponto existir e for único).

1) (Total: 2.0 pontos). Represente graficamente

a) (0.2 pontos) três curvas de nível de $U(x,y) = x+y-1$,
b) (0.2 pontos) três curvas de nível de $V(x,y) = x+1$,
c) (0.8 pontos) três curvas de nível de $U(x,y)V(x,y)$,
d) (0.8 pontos) três curvas de nível de $U(x,y)^2 + V(x,y)^2$.

2) (Total: 8.0 pontos). Sejam
$H(x,y) = U(x,y)V(x,y) - 1$,
$E(x,y) = U(x,y)^2 + V(x,y)^2 - 1$,
H_0 o centro de $H(x,y)$,
E_0 o centro de $E(x,y)$,
$H'(x,y)$ a cônica homogênea associada a $H(x,y)$,
$E'(x,y)$ a cônica homogênea associada a $E(x,y)$.

a) (1.0 pontos) Represente $H(x,y)$ e $E(x,y)$ na forma $\begin{bmatrix} a \\ b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ e calcule seus discriminantes.
b) (2.0 pontos) Fatore $H'(x,y)$ como um produto $\begin{bmatrix} 0 \\ a & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ e represente graficamente as retas $\begin{bmatrix} 0 \\ a & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$.
c) (1.0 pontos) Tente fatorar $E'(x,y)$ como um produto $\begin{bmatrix} 0 \\ a & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$. O que acontece?

d) (2.0 pontos) Sejam $H_x = \frac{\partial}{\partial x} H$, $H_y = \frac{\partial}{\partial y} H$ e $E_x = \frac{\partial}{\partial x} E$, $E_y = \frac{\partial}{\partial y} E$. Calcule H_x, H_y, E_x, e E_y (ponha seus resultados na forma $\left[\begin{smallmatrix} 0 & & \\ a & 0 & \\ b & c & 0 \end{smallmatrix}\right]$) e represente graficamente os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ onde $H_x(x,y)$, $H_y(x,y)$, $E_x(x,y)$, e $H_y(x,y)$ são zero. Aí calcule H_0 e E_0 - pode ser pelo gráfico.

e) (2.0 pontos) A notação $G(x,y)$ é boa para especificar *substituições*: por exemplo, se $G(x,y) = x^2 + y + 200$ então $G((x+y), 4x+3) = (x+y)^2 + (4x+3) + 200$. Seja $(x_0, y_0) = H_0$; seja $H''(x,y) = H(x - x_0, y - y_0)$. Represente $H''(x,y)$ na forma $\left[\begin{smallmatrix} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right]$ e compare o que você obteve com o H'.

Lembre que GA é um curso de *escrita matemática*!

As questões acima testam mais coisas que foram discutidas em sala do que parece... por isso você é responsável por interpretar cada questão corretamente e escolher o modo mais adequado de respondê-la. Lembre da idéia de que qualquer leitor deve ser capaz de seguir facilmente cada um dos seus passos, e escrever bem nos ajuda a conferir que a gente não cometeu erros...

Marque claramente o que é e o que não é rascunho.

Boa prova! =)