Cálculo 2
PURO-UFF - 2015.2
P2 - 21/mar/2016 - Eduardo Ochs

1) **(Total: 2.5)** Seja $(*)$ esta EDO: $f'' + 5f' + 6f = 0$.
a) **(1.0 pts)** Encontre as soluções básicas de $(*)$.
b) **(0.5 pts)** Encontre uma solução de $(*)$ que obedeça $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.
c) **(0.5 pts)** Encontre uma solução de $(*)$ que obedeça $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$.
d) **(0.5 pts)** Encontre uma solução de $(*)$ que obedeça $f(0) = 2$ e $f(1) = 3$.

2) **(Total: 2.5)** Seja $(**)$ esta EDO: $(D - (a + ib))(D - (a - ib))f = 0$ (obs: $a, b \in \mathbb{R}$).
a) **(1.0 pts)** Encontre as soluções básicas de $(**)$.
b) **(1.0 pts)** Encontre a e b para que $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ seja solução de $(**)$.
c) **(0.5 pts)** Com o a e o b do item anterior, reescreva $(**)$ na forma $f'' + \alpha f' + \beta f = 0$ $(***)$ e verifique que $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ obedece $(***)$.

3) **(Total: 5.0)** Seja $(****)$ esta EDO: $y' = \frac{\cos x}{2y}$.
a) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral de $(****)$.
b) **(1.0 pts)** Encontre a solução $y = f(x)$ de $(****)$ na qual $f(2\pi) = -3$.
c) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $y = f(x)$ de $(****)$ na qual $f(\pi) = 1$.
d) **(2.0 pts)** Represente graficamente 4 soluções de $(****)$. Dica: calcule o comportamento delas em $x = k\frac{\pi}{2}$ e improvise o resto.

Gabarito:
(Versão preliminar, não revisado)

1)
$$\begin{aligned} 0 &= f'' + 5f' + 6f \\ &= (D^2 + 5D + 6)f \\ &= (D+2)(D=3)f \end{aligned}$$

1a) $f_1(x) = e^{-2x}$, $f_2(x) = e^{-3x}$

1b) Queremos $f_3(x) = af_1(x) + bf_2(x)$, com

$$\begin{aligned} f_3(0) = 0 &= a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b \quad \Rightarrow \quad b = -a \\ f_3(1) = 1 &= ae^{-2} + be^{-3} = ae^{-2} - ae^{-3} \\ a &= \tfrac{1}{e^{-2} - e^{-3}} \\ b = -a &= \tfrac{1}{e^{-3} - e^{-2}} \end{aligned}$$

1c) Queremos $f_4(x) = cf_1(x) + df_2(x)$, com

$$\begin{aligned} f_4(0) = 1 &= c + d \quad \Rightarrow \quad d = -1 - c \\ f_4(1) = 0 &= ce^{-2} + de^{-3} \\ &= ce^{-2} + (1-c)e^{-3} \\ &= c(e^{-2} - e^{-3}) + e^{-3} \\ c &= -\tfrac{e^{-3}}{e^{-2} - e^{-3}} \\ &= \tfrac{e^{-3}}{e^{-3} - e^{-2}} \\ d &= 1 - \tfrac{e^{-3}}{e^{-3} - e^{-2}} \\ &= \tfrac{(e^{-3} - e^{-2}) - e^{-3}}{e^{-3} - e^{-2}} \\ &= \tfrac{e^{-2}}{e^{-2} - e^{-3}} \end{aligned}$$

1d) $f_5(x) = 2f_4(x) + 3f_3(x)$.

2a) $f_1(x) = e^{(a+ib)x}$, $f_2(x) = e^{(a-ib)x}$, ou
$f_3(x) = \frac{f_1(x)+f_2(x)}{2} = e^{ax}\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2} = e^{ax}\cos x$,
$f_4(x) = \frac{f_1(x)-f_2(x)}{2i} = e^{ax}\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i} = e^{ax}\operatorname{sen} x$,
2b) $a = -1$, $b = 2$.

$$\begin{aligned} 0 &= (D - (a+ib))(D - (a-ib))f \\ &= (D - (-1+2i))(D - (-1-2i))f \\ &= (D^2 - (-1+2i)D - (-1-2i)D + (-1+2i)(-1-2i))f \\ &= (D^2 + 2D + (1+4))f \\ &= f'' + 2f' + 5f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(e^{-x}\cos 2x) &= -(e^{-x}\cos 2x) - 2(e^{-x}\operatorname{sen} 2x) \\ D(e^{-x}\operatorname{sen} 2x) &= -(e^{-x}\operatorname{sen} 2x) + 2(e^{-x}\cos 2x) \end{aligned}$$

Sejam $C = e^{-x}\cos 2x$ e $S = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$.
Então $DC = -C - 2S$, $DS = -S + 2C = 2C - S$,
$D(DC) = -DC - 2DS = -(-C - 2S) - 2(2C - S) = C + 2S - 4C + 2S = -3C + 4S$,
$(D^2 + 2D + 5)C = (-3C + 4S) + 2(-C - 2S) + 5C = 0$.