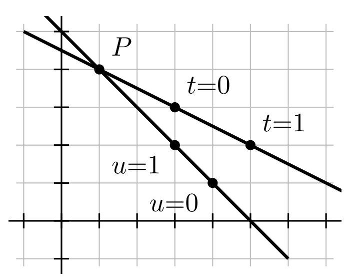
Geometria Analítica
PURO-UFF - 2015.2
Material para exercícios - Eduardo Ochs
Links importantes:
http://angg.twu.net/2015.2-GA.html (página do curso)
http://angg.twu.net/LATEX/2015-2-GA-material.pdf (lista, atualizada)
http://angg.twu.net/2015.2-GA/2015.2-GA.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/2015.1-GA/GA_Reis_Silva.pdf (livro)
http://angg.twu.net/2015.1-GA/mariana_imbelloni_retas.pdf
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

Exercícios de V/F/justifique da primeira lista do Reginaldo, reescritos:
(2a) Se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.
(2b) Seja $ABCD$ um quadrilátero...
(2c) $|| \, ||\vec{u}|| \, \vec{v}|| = || \, ||\vec{v}|| \, \vec{u}||$
(2d) Se $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ então $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$.
(2e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$
(2f) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.
(2g) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
(2h) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$.
(2i) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.
(2j) Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 4)$.
(2k) O triângulo com vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-2, 1)$ é retângulo.
(2l) Todo vetor em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 3)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, \frac{3}{2})}$.
(2m) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\mathrm{Pr}_{\vec{v}} \, \vec{u} = \vec{0}$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

2) (Fizemos este em sala em 16/dez/2015)
Represente graficamente as retas abaixo.
Nas parametrizadas indique no gráfico os pontos associados a $t = 0$ e $t = 1$.
$r_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$
$r_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4 \}$
$r_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 2 \}$
$r_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \}$
$r_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6 \}$
$r_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 3 \}$
$r_g = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_h = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-2, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_i = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(1, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_j = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_k = \{ (2, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 \}$
$r_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x \}$
$r_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \}$

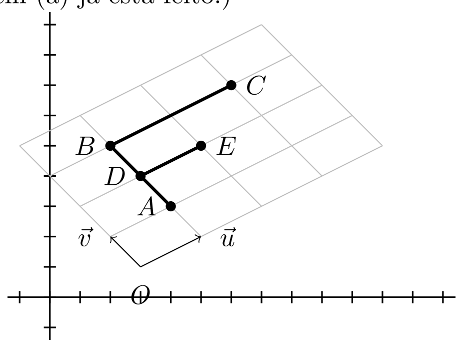
3) Em cada um dos casos abaixo, represente r e s graficamente, marcando os pontos associados a $t = 0$, $t = 1$, $u = 0$, $u = 1$; encontre no olhômetro o ponto $P \in r \cap s$; encontre (também no olhômetro) os valores de t e u associados a P; e verifique que você encontrou o t e o u certos, fazendo como abaixo.

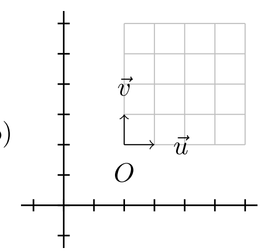


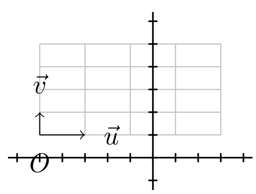
$r = \{ (3, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$s = \{ (4, 1) + u\overrightarrow{(-1, 1)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
$(1, 4) = (3, 3) + (-1)\overrightarrow{(2, -1)} \in r$
$(1, 4) = (4, 1) + 3\overrightarrow{(-1, 1)} \in s$
$(1, 4) \in r \cap s$

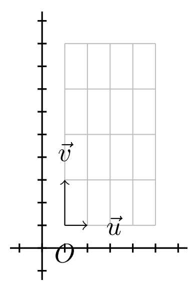
a) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(0, 3)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 4) + u\overrightarrow{(2, 0)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
b) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(3, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 2) + u\overrightarrow{(2, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
c) $r = \{ (1 + 3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (2u, 2 + 3u) \mid u \in \mathbb{R} \}$
d) $r = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (1, 0) + u\overrightarrow{(1, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
(No d o olhômetro não basta, você vai precisar resolver um sistema)

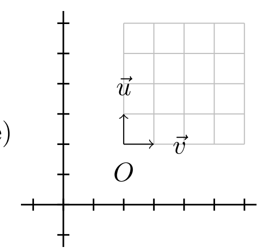
Exercício:
Em cada um das figuras abaixo vamos definir o sistema de coordenadas Σ por
$\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ e
$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$.
Sejam:
$B = (1,3)_\Sigma$, $C = (3,3)_\Sigma$,
$D = (1,2)_\Sigma$, $E = (2,2)_\Sigma$,
$A = (1,1)_\Sigma$.
Desenhe a figura formada pelos pontos A, B, C, D e E e pelos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.
(O item (a) já está feito.)

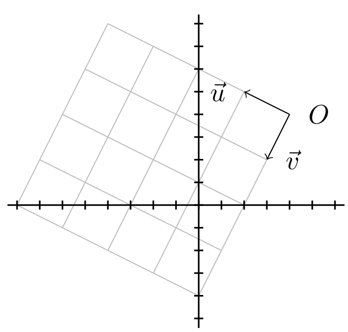
a)


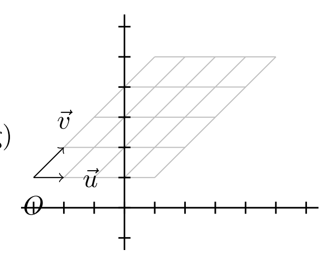
b)


c)


d)


e)


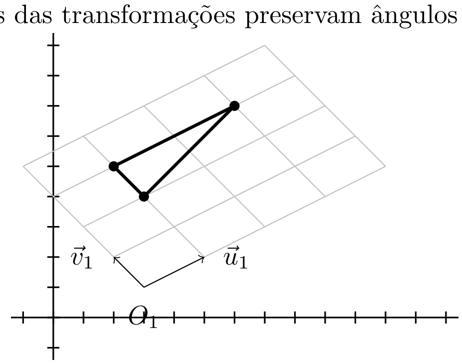
f)


g)


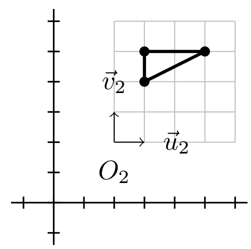
Agora vamos usar uma notação um pouco mais pesada...
$\Sigma_i = (O_i, \vec{u}_i, \vec{v}_i)$,
$\Sigma_0 = ((0,0), \overrightarrow{(1,0)}, \overrightarrow{(0,1)})$,
$(a,b)_{\Sigma_i} = O_i + a\vec{u}_i + b\vec{v}_i$,
$B_i = (1,3)_{\Sigma_i}$, $C_i = (3,3)_{\Sigma_i}$,
$D_i = (1,2)_{\Sigma_i}$, $E_i = (2,2)_{\Sigma_i}$,
$A_i = (1,1)_{\Sigma_i}$.
As figuras abaixo representam os triângulos $D_iB_iC_i$ para $i = 1, \ldots, 7$.

Já vimos que na passagem de um diagrama para outro as figuras - 'F's e triângulos - podem ser transladadas, ampliadas, reduzidas, amassadas, deformadas, espelhadas...
Quais das transformações preservam distâncias ($d(P_i, Q_i) = d(P_j, Q_j)$)?
Quais das transformações preservam ângulos ($P_i\hat{Q}_iR_i = P_j\hat{Q}_jR_j$)?

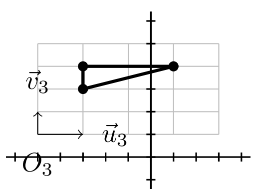
a)



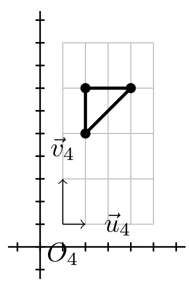
b)



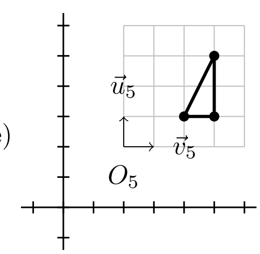
c)



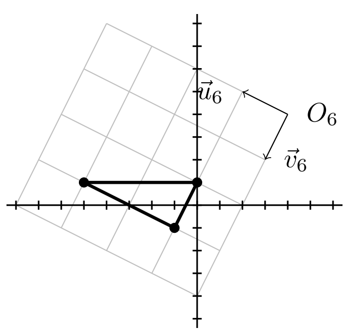
d)



e)



f)



g)