Cálculo 2
PURO-UFF - 2016.1
P2 - 28/jul/2016 - Eduardo Ochs
Links importantes:
http://angg.twu.net/2016.1-C2.html (página do curso)
http://angg.twu.net/2016.1-C2/2016.1-C2.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/LATEX/2016-1-C2-P2.pdf (esta prova, com gabarito)
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

1) **(Total: 4.5)**

a) **(0.2 pts)** Converta a EDO $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f = 0$ para a forma $f'' + \alpha f' + \beta f = 0$. Quem são $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?
b) **(0.3 pts)** Converta a EDO $f'' - 6f' + 25f = 0$ para a forma $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f = 0$. Quem são $a, b \in \mathbb{R}$?
c) **(0.5 pts)** A EDO $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f = 0$ tem soluções básicas reais $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$. Quem são $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?
d) **(1.0 pts)** Encontre as soluções básicas reais, f_1 e f_2, de $f'' + 4f' + 13f = 0$.
f) **(1.0 pts)** Encontre uma solução real, f_3, de $f'' + 4f' + 13f = 0$ que obedeça $f_3(0) = 1$ e $f_3'(0) = 1$.
g) **(1.5 pts)** Represente graficamente f_1, f_2, f_3. Dicas: comece fazendo uma tabela dos valores delas em $x_1, x_2, \ldots, x_5$, e escolha $x_1, x_2, \ldots, x_5$ para os quais seja fácil calcular valores exatos e aproximados para as '$f_i(x_j)$'s.

2) **(Total: 2.5)** Considere a EDO $f'(x) = f(x) - x$.
a) **(1.0 pts)** Represente graficamente o campo vetorial associado a ela.
b) **(1.5 pts)** Encontre uma solução para ela que tenha $f(1) = 1$ e represente graficamente esta solução sobre o campo vetorial do item anterior.

3) **(Total: 3.0)** Resolva a EDO $(6xy - 2y)y' + 2 + 3y^2 = 0$.

Mini-gabarito (ainda não revisado!):

1a) $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f = (D^2-2aD+(a^2+b^2))f = f''+2af'+(a^2+b^2)f$
Daí: $\alpha = -2a$, $\beta = a^2+b^2$

1b) $f'' - 6f' + 25f = 0 = (D^2 - 6D + 25)f = (D-(3+4i))(D-(3-4i))f$
Daí: $a = 3$, $b = 4$

1c) $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f$ tem soluções
$f_1(x) = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx}$ e
$f_2(x) = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx}$.
$(f_1(x)+f_2(x))/2 = e^{ax}(e^{ibx}+e^{-ibx})/2 = e^{ax}\cos bx$
$(f_1(x)-f_2(x))/2i = e^{ax}(e^{ibx}-e^{-ibx})/2i = e^{ax}\operatorname{sen} bx$
Daí: $\alpha = a$, $\beta = b$.

d) $f'' + 4f' + 13f = (D^2 + 4D + 13)f = (D-(-2+3i))(D-(-2-3i))f$
$f_1 = e^{-2x}\cos 3x$
$f_2 = e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$

e) $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = 0$
$f_1' = -2f_1 - 3f_2$, $f_1'(0) = -2f_1(0) - 3f_2(0) = -2$,
$f_2' = -2f_2 + 3f_1$, $f_2'(0) = -2f_2(0) + 3f_1(0) = 3$,
Se $f_3 = af_1 + bf_2$ então $f_3(0) = a$ e $f_3'(0) = -2a + 3b$.
$f_3(0) = 1 \ \Rightarrow\ a = 1$
$f_3'(0) = 1 \ \Rightarrow\ -2a + 3b = 1 \ \Rightarrow\ -2 + 3b = 1 \ \Rightarrow\ b = 1$
$f_3(x) = e^{-2x}\cos 3x + e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$

f) Se $x = k\frac{\pi}{6}$ então
$\cos 3x = \cos k3\frac{\pi}{6} = \cos k\frac{\pi}{2}$,
$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} k3\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2}$,
$e^{-2x} = e^{-2k\frac{\pi}{6}} = e^{-k\frac{\pi}{3}} = (e^{-\frac{\pi}{3}})^k \approx (e^{-1})^k \approx (\frac{1}{3})^k$,
$f_1(x) = e^{-2x}\cos 3x \approx (\frac{1}{3})^k \cos k\frac{\pi}{2}$,
$f_2(x) = e^{-2x}\operatorname{sen} 3x \approx (\frac{1}{3})^k \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2}$,
$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
$x = k\frac{\pi}{6} \approx \frac{k}{2}$.

k	$x \approx \frac{k}{2}$	$f_1(x) \approx (\frac{1}{3})^k \cos k\frac{\pi}{2}$	$f_2(x) \approx (\frac{1}{3})^k \operatorname{sen} k\frac{\pi}{2}$	$f_3(x)$
0	0	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$	1
1	1/2	$\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	2/2	$\frac{1}{9} \cdot (-1) = -\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \cdot 0 = 0$	$-\frac{1}{9}$
3	3/2	$\frac{1}{27} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{27} \cdot (-1) = -\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$
4	4/2	$\frac{1}{81} \cdot 1 = \frac{1}{81}$	$\frac{1}{81} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{81}$

2a) (Ainda não aprendi a fazer campos vetoriais em LaTeX =/)
2b) Por um erro meu eu escolhi uma EDO que não dá pra resolver com os métodos que vimos no curso, e que precisa das idéias dos capítulos 27 e 28 do livro da Hernández... vou dar 0.7 nessa questão pra todo mundo, e os outros 0.8 de acordo com o que a pessoa tiver conseguido fazer...

3) A EDO pode ser reescrita como:
$(6xy - 2y)\frac{dy}{dx} + 2 + 3y^2 = 0$
$(6xy - 2y)dy + (2 + 3y^2)dx = 0$
Sejam $F_x(x, y) = 2 + 3y^2$ e $F_y(x, y) = 6xy - 2y$.
Então $F_{xy}(x, y) = 6y$, $F_{yx}(x, y) = 6y$, e a EDO é exata.
Se $F(x, y) = 2x + 3xy^2 - y^3$ então essa F gera a F_x e a F_y da EDO,
e as soluções da EDO são as '$f(x)$'s tais que $F(x, f(x))$ é constante.
(Falta explicar como a gente pode obter a F a partir da F_x e da F_y...)