Geometria Analítica
PURO-UFF - 2016.1
P2 - 28/jul/2016 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Links importantes:
`http://angg.twu.net/2016.1-GA.html` (página do curso)
`http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf` (quadros)
`http://angg.twu.net/LATEX/2016-1-GA-P2.pdf` (esta prova, com gabarito)
`eduardoochs@gmail.com` (meu e-mail)

1) **(Total: 1.5)** Em cada um dos itens abaixo encontre 3 pontos, P_1, P_2, P_3, da parábola $S = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F) = d(P,d) \}$ e a equação de *alguma* parábola que passa por estes pontos.
a) **(0.2 pts)** $F = (0,1)$, $d : y = -1$
b) **(0.3 pts)** $F = (0,2)$, $d : y = -2$
c) **(1.0 pts)** $F = (4,2)$, $d : x = 0$

2) **(Total: 1.5)** Em cada um dos itens abaixo encontre 4 pontos P_1, P_2, P_3, P_4 da elipse $E = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,d) = 2d(P,F) \}$ e a equação de alguma elipse que passa por estes pontos.
a) **(0.5 pts)** $F = (0.5,0)$, $d : x = 2$
b) **(1.0 pts)** $F = (0,0)$, $d : y = 3$

3) **(Total: 1.0)** Faça um esboço da cônica com equação $(x-3)^2-(3y+3)^2-1 = 0$.

4) **(Total: 4.0)** Sejam $r : (2+t, 1+2t, 11-4t)$ e $r' : (1+3u, 2-u, 6+9u)$.
a) **(1.0 pts)** Mostre que r e r' são coplanares.
b) **(1.0 pts)** Encontre a equação do plano π contendo r e r'.
c) **(1.0 pts)** Sejam $P = (4,0,4)$, P' o ponto de π mais próximo de P, e P'' o ponto simétrico a P com relação a π. Dê as coordenadas de P' e P''.
d) **(1.0 pts)** Calcule $d(P,\pi)$.

5) **(Total: 2.0)** Sejam $\pi : x+y+2z = 4$, $\pi' : z-4y = 8$.
a) **(1.0 pts)** Encontre uma reta paralela a π e π' que passa por $P = (2,3,4)$.
b) **(1.0 pts)** Dê a equação da reta $r = \pi \cap \pi'$.

Algumas fórmulas:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} aei+bfg+cdh \\ -afh-bdi-ceg \end{matrix} \qquad |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \overrightarrow{(u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)}$$

Mini-gabarito:
(incompleto e ainda não revisado - contém erros!)

1a) $\left[\begin{array}{ccc} {\scriptstyle P_{-1}=(-2,1)} & & {\scriptstyle P_1=(2,1)} \\ & {\scriptstyle P_0=(0,0)} & \end{array}\right]$; $S : y = x^2/2$
1b) $\left[\begin{array}{ccc} {\scriptstyle P_{-1}=(-4,2)} & & {\scriptstyle P_1=(4,2)} \\ & {\scriptstyle P_0=(0,0)} & \end{array}\right]$; $S : y = x^2/8$
1c) $\left[\begin{array}{cc} & {\scriptstyle P_{-1}=(4,6)} \\ {\scriptstyle P_0=(2,2)} & \\ & {\scriptstyle P_1=(4,-2)} \end{array}\right]$; $S : (x-2) = (y-2)^2/8$

2a) $\left[\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle P_2=(0,\sqrt{3}/2)} & \\ {\scriptstyle P_2=(-1,0)} & & {\scriptstyle P_3=(1,0)} \\ & {\scriptstyle P_4=(0,-\sqrt{3}/2)} & \end{array}\right]$; $\quad E : x^2 + (\frac{y}{\sqrt{3}/2})^2 = 1$
2b) $\left[\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle P_2=(-1,\sqrt{3})} & \\ {\scriptstyle P_2=(-3,0)} & & {\scriptstyle P_3=(1,0)} \\ & {\scriptstyle P_4=(-1,\sqrt{3})} & \end{array}\right]$; $\quad E : (\frac{x+1}{2})^2 + (\frac{y}{\sqrt{3}})^2 = 1$

3) $H : (x-3)^2 - (3y+3)^2 = 1$ é uma hipérbole.
$H_0 : (x-3)^2 - (3y+3)^2 = 0$ são as assíntotas de H.
Como $(x-3)^2 - (3y+3)^2 = ((x-3)+(3y+3))((x-3)-(3y+3))$, sejam
$r : (x-3)+(3y+3) = 0$ e
$r' : (x-3)-(3y+3) = 0$; temos
$H_0 = r \cup r'$,
$r : x + 3y = 0 \qquad$ (ou: $r : y = -\frac{x}{3}$),
$r' : x - 3y - 6 = 0 \quad$ (ou: $r' : y = \frac{x}{3} - 2$).
r e r' se intersectam em $x - 3 = 0$ e $3y + 3 = 0$, ou seja, em $(x, y) = (3, -1)$.
Pontos óbvios de H: $(x-3)^2 = 1$, $(3y+3) = 0$; $x - 3 = \pm 1$, $x = 3 \pm 1$, $y = -1$.
$(2, -1) \in H$, $(4, -1) \in H$.

4a) $r = \{\, A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ e $r' = \{\, B + u\vec{v}' \mid u \in \mathbb{R} \,\}$, onde
$A = (2, 1, 11)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 2, -4)}$,
$B = (1, 2, 6)$, $\vec{v}' = \overrightarrow{(3, -1, 9)}$.
r e r' são coplanares se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{AB}$ são coplanares.
$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}]| = \begin{vmatrix} \scriptstyle 1 & \scriptstyle 2 & \scriptstyle -4 \\ \scriptstyle 3 & \scriptstyle -1 & \scriptstyle 9 \\ \scriptstyle -1 & \scriptstyle 1 & \scriptstyle -5 \end{vmatrix} = \begin{smallmatrix} 1\cdot(-1)\cdot(-5)+2\cdot 9\cdot(-1)+(-4)\cdot 3\cdot 1 \\ -(-4)\cdot(-1)\cdot(-1)-2\cdot 3\cdot(-5)-1\cdot 9\cdot 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 5-18-12 \\ +4+30-9 \end{smallmatrix} = 0.$
4b) Sejam $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{smallmatrix} \overrightarrow{(1,2,-4)} \\ \times\overrightarrow{(3,-1,9)} \end{smallmatrix} = \overrightarrow{(14, -21, -7)} = 7\overrightarrow{(2, -3, -1)}$
Então $\pi = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y - z = d \,\}$,
e como $A \in \pi$ temos $d = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 11 = -10$,
e portanto $\pi = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y - z = -10 \,\}$.
4c) Sejam $\vec{n}' = \frac{1}{7}\vec{n} = \overrightarrow{(2, -3, -1)}$, $s = \{\, P + t\vec{n}' \mid t \in \mathbb{R} \,\}$. Então $P' \in s \cap \pi$.
$P' = (4, 0, 4) + t\overrightarrow{(2, -3, -1)} = (4 + 2t, -3t, 4 - t)$ obedece $2x - 3y - z = -10$,
portanto $-10 = 2(4 + 2t) - 3(-3t) - (4 - t) = 8 + 4t + 9t - 4 + t = 14t + 4$,
$14t = -14$, $t = -1$,
$P' = (4 + 2(-1), -3(-1), 4 - (-1)) = (2, 3, 5)$,
$\vec{PP'} = \overrightarrow{(-2, 3, 1)}$,
$P'' = P' + \vec{PP'} = (2, 3, 5) + \overrightarrow{(-2, 3, 1)} = (0, 6, 6)$.
4d) $d(P, \pi) = d(P, P') = ||\overrightarrow{(-2, 3, 1)}|| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$.

5a) Vetor normal a π: $\vec{n} = \overrightarrow{(1, 1, 2)}$.
Vetor normal a π': $\vec{n}' = \overrightarrow{(0, -4, 1)}$.
Vetor paralelo a π e π': $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}' = \overrightarrow{(9, -1, -4)}$.
Reta que queremos: $\{\, (2, 3, 4) + t\overrightarrow{(9, -1, -4)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
5b) Se $Q = (x, y, 0)$ pertence a $r = \pi \cap \pi'$, então $x + y = 4$, $-4y = 8$,
$y = -2$, $x = 6$, $Q = (6, -2, 0)$,
$r = \{\, (6, -2, 0) + t\overrightarrow{(9, -1, -4)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.