Geometria Analítica
PURO-UFF - 2016.1
VR - 1°/ago/2016 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.
Esta prova vai ter que ser corrigida muito rápido
e com pouca tolerância com erros de conta, então
teste os seus resultados!!!

Links importantes:
http://angg.twu.net/2016.1-GA.html (página do curso)
http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/LATEX/2016-1-GA-P2.pdf (esta prova, com gabarito)
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

1) **(Total: 3.0)** Sejam $\pi : x+y+z = 4$, $A = (3,3,3)$, e $B_t = (2,3,4)+t\overrightarrow{(2,0,3)}$, r_t a reta contendo A e B_t.
a) **(0.5 pts)** Encontre o ponto de interseção entre π e r_2.
b) **(1.0 pts)** Encontre o ponto de interseção entre π e r_t no caso geral.
c) **(0.5 pts)** Encontre o t para o qual π e r_t são paralelos.
d) **(1.0 pts)** Existe um t para o qual π e r_t são ortogonais? Sim, não, qual, porquê?

2) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (0,2)$, $B = (4,0)$ e C, C', C'', C''' quatro círculos diferentes – à sua escolha – que passem por A e B.
a) **(0.5 pts)** Represente graficamente A, B e os quatro círculos que você escolheu.
b) **(0.5 pts)** Dê os centros e os raios destes círculos.
c) **(1.0 pts)** Dê a equação de um círculo que passa por A e B e cujo centro tem $y > 3$.

3) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (0,2)$, $r : y = x-2$ e C, C', C'', C''' quatro círculos diferentes – à sua escolha – que passem por A e sejam tangentes a r.
a) **(1.0 pts)** Represente graficamente A, r e os quatro círculos que você escolheu.
b) **(1.0 pts)** Dê os centros e os raios destes círculos.

4) **(Total: 2.0)** Calcule a distância de $P = (4,4,4)$ a $\pi : x+2y+4z = 4$ de um modo que não seja só a aplicação de uma fórmula. Inclua um teste de que a $d(P,\pi)$ é realmente a que você calculou e explicações.

5) **(Total: 2.0)** Sejam $r : y = 2x$, $S : (x/3) = (y-2)^2$, e $I, I' \in r \cap S$. Represente graficamente r, S, I, I' e calcule as coordenadas de uma das interseções.

Algumas fórmulas:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} aei+bfg+cdh \\ -afh-bdi-ceg \end{matrix} \qquad |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \overrightarrow{(u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)}$$

Mini-gabarito:
(não revisado, contém erros)

1a) $B_2 = (6,3,10)$, $\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{(3,0,7)}$, $r_2 : (3+3t, 3, 3+7t)$
Queremos $(3+3t,3,3+7t) \in \pi$, i.e., $4 = (3+3t)+3+(3+7t) = 9+10t$; $10t = -5$, $t = -\frac{1}{2}$.
Ponto: $(3+3t,3,3+7t) = (3-3\frac{1}{2},3,3-7\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2},\frac{6}{2},-\frac{1}{2}) \in r_2 \cap \pi$.

1b) $B_t = (2+2t,3,4+3t)$, $\overrightarrow{AB_t} = \overrightarrow{(-1+2t,0,1+3t)}$,
$r_t = \{\, A + \lambda\overrightarrow{AB_t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\}$
$= \{\, (3,3,3) + \lambda\overrightarrow{(-1+2t,0,1+3t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\}$
$= \{\, (3+\lambda(2t-1), 3, 3+\lambda(1+3t)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\}$
$4 = (3+\lambda(2t-1))+3+(3+\lambda(1+3t)) = 9+\lambda(5t)$
$-5 = \lambda \cdot 5t$
$\lambda = -1/t$
Ponto: $(3+-\frac{1}{t}(2t-1),3,3-\frac{1}{t}(1+3t)) = (3-2+\frac{1}{t},3,3-3-\frac{1}{t}) = (1+\frac{1}{t},3,-\frac{1}{t})$
$(1+\frac{1}{t},3,-\frac{1}{t}) \in r_t \cap \pi$.

1c) $\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{AB_t} \parallel \pi$ se e só se $x+y+z=0$, ou seja,
$0 = (-1+2t)+0+(1+3t) = 5t$, daí $t=0$; $B_0 = (2,3,4)$, $r_0 \parallel \pi$.

1d) π e r_t são ortogonais se e só se $\vec{n} \parallel \overrightarrow{AB_t}$, o que acontece se e só se $\vec{n} \times \overrightarrow{AB_t} = \overrightarrow{(0,0,0)}$.
$\vec{n} \times \overrightarrow{AB_t} = \overrightarrow{(3,3,3)} \times \overrightarrow{(-1+2t,0,1+3t)}$
$= \overrightarrow{(3(1+3t), 3(-1+2t)-3(1+3t), -3(-1+2t))}$
$= \overrightarrow{(3+9t, 6-3t, 3-6t)}$,
e $\overrightarrow{(3+9t,6-3t,3-6t)}$ nunca é $\overrightarrow{(0,0,0)}$ porque $3+9t=0$ e $3-6t=0$ têm soluções diferentes... então não existe t com $\pi \perp r_t$.

2a) (gráfico)
2b) $C_0 = (1,-1)$, $C_0' = (2,1)$, $C_0'' = (3,3)$, $C_0''' = (4,5)$,
$R = \sqrt{10}$, $R' = \sqrt{5}$, $R'' = \sqrt{10}$, $R''' = 5$.
2c) O círculo C''' acima. Equação: $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$.

3a) (gráfico)
3b) $C_0 = (1,1)$, $R = \sqrt{2}$,
$C_0' = (2,4)$, $R' = \sqrt{8}$,
$C_0'' = (-2,0)$, $R'' = \sqrt{8}$,
$C_0''' = ...$, $R''' = ...$,

4) Sejam $\vec{n} = \overrightarrow{(1,2,4)}$,
$r = \{\, P + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$= \{\, (4,4,4) + t\overrightarrow{(1,2,4)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$= \{\, (4+t, 4+2t, 4+4t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
Se $P' = (4+t, 4+2t, 4+4t) \in \pi$ então
$4 = (4+t) + 2(4+2t) + 4(4+4t) = 28 + 21t$, $t = -\frac{24}{21} = -\frac{8}{7}$,
$P' = (4 - \frac{8}{7}, 4 - 2\frac{8}{7}, 4 - 4\frac{8}{7})$
(...)

5) S é uma parábola com pontos óbvios $(0,2)$, $(3,3)$, $(3,1)$.
Um ponto (x,y) que obedece $y = 2x$ e $(x/3) = (y-2)^2$ também obedece:
$(x/3) = (2x-2)^2$,
$x = 3(2x-2)^2 = 3 \cdot 4(x-1)^2 = 12(x^2 - 2x + 1) = 12x^2 - 24x + 12$,
$12x^2 - 25x + 12 = 0. \qquad (*)$
Sejam x_1 e x_2 as soluções da equação $(*)$ acima;
então $(x_1, 2x_1)$ e $(x_2, 2x_2)$ são as duas interseções da reta r com a parábola S.