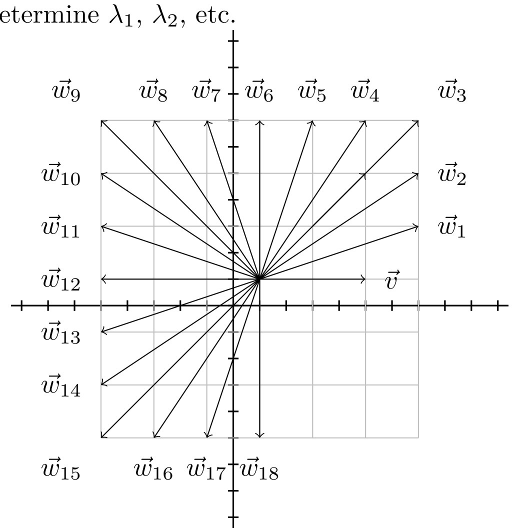
Geometria Analítica
PURO-UFF - 2016.1
Material para exercícios - Eduardo Ochs
Links importantes:
http://angg.twu.net/2016.1-GA.html (página do curso)
http://angg.twu.net/LATEX/2016-1-GA-material.pdf (lista, atualizada)
http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/2015.1-GA/GA_Reis_Silva.pdf (livro)
http://angg.twu.net/2015.1-GA/mariana_imbelloni_retas.pdf
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

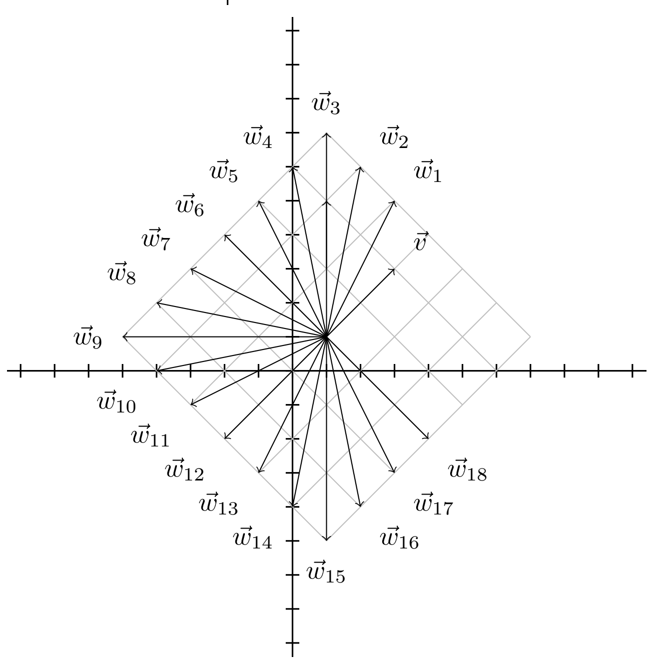
Exercícios de V/F/justifique da primeira lista do Reginaldo, reescritos:
(2a) Se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.
(2b) Seja $ABCD$ um quadrilátero...
(2c) $||\,||\vec{u}||\,\vec{v}|| = ||\,||\vec{v}||\,\vec{u}||$
(2d) Se $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ então $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$.
(2e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$
(2f) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.
(2g) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
(2h) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$.
(2i) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.
(2j) Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 4)$.
(2k) O triângulo com vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-2, 1)$ é retângulo.
(2l) Todo vetor em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 3)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, \frac{3}{2})}$.
(2m) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{0}$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

A *projeção sobre* $\vec{v}$ *de* $\vec{w}$, $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\,\vec{w}$, é sempre um vetor da forma $\lambda\vec{v}$.
Digamos que $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\,\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$, $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\,\vec{w}_2 = \lambda_1\vec{v}_2$, etc.
Determine λ_1, λ_2, etc.

a)



b)



Calule:
$\{x : \{0, 1, 2, 3\}; x^2\}$
$\{x : \{0, 1, 2, 3\}, x \geq 2; x\}$

Represente graficamente:
$A := \{(1, 4), (2, 4), (1, 3)\}$
$B := \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$
$C := \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 4)\}$
$D := \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
$h := \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$
$k := \{x : \{0, 1, 2, 3\}; (x, 3 - x)\}$
$m := \{y : \{0, 1, 2, 3\}; (3 - y, y)\}$

Let
$A = \{x : \{-1, ..., 4\}; x^2\}$ and
$B = \{x : \{-1, ..., 4\}; x^2 \le 5; x\}$.
Then A and B can be calculated by:

x	x^2
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

x	x^2	$x^2 \le 5$	x
-1	1	1	-1
0	0	1	0
1	1	1	1
2	4	1	2
3	9	0	
4	16	0	

We get:
$A = \{1, 0, 1, 4, 9, 16\}$,
$B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Let
$A = \{x : \{1, ..., 5\}, y : \{1, ..., x\}, x + y \le 6; (x, y)\}$ and
$B = \{y : \{1, ..., 5\}, x : \{y, ..., 5\}, x + y \le 6; (x, y)\}$.
Then A and B can be calculated by:

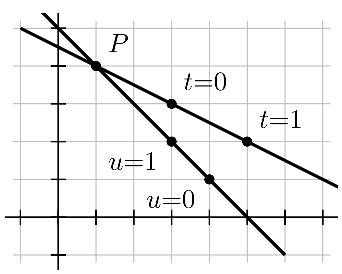
x	y	$x+y$	$x+y \le 6$	(x, y)
1	1	2	1	$(1, 1)$
2	1	3	1	$(2, 1)$
	2	4	1	$(2, 2)$
3	1	4	1	$(3, 1)$
	2	5	1	$(3, 2)$
	3	6	1	$(3, 3)$
4	1	5	1	$(4, 1)$
	2	6	1	$(4, 2)$
	3	7	0	
	4	8	0	
5	1	6	1	$(5, 1)$
	2	7	1	
	3	8	0	
	4	9	0	
	5	10	0	

y	x	$x+y$	$x+y \le 6$	(x, y)
1	1	2	1	$(1, 1)$
	2	3	1	$(2, 1)$
	3	4	1	$(3, 1)$
	4	5	1	$(4, 1)$
	5	6	1	$(5, 1)$
2	2	4	1	$(2, 2)$
	3	5	1	$(3, 2)$
	4	6	1	$(4, 2)$
	5	7	0	
3	3	6	1	$(3, 3)$
	4	7	0	
	5	8	0	
4	4	8	0	
	5	9	0	
5	5	10	0	

We get:
$A = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$ and
$B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (3, 3)\}$.

2) (Fizemos este em sala em 16/dez/2015)
Represente graficamente as retas abaixo.
Nas parametrizadas indique no gráfico os pontos associados a $t = 0$ e $t = 1$.
$r_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$
$r_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4 \}$
$r_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 2 \}$
$r_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \}$
$r_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6 \}$
$r_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 3 \}$
$r_g = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_h = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-2, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_i = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(1, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_j = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_k = \{ (2, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 \}$
$r_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x \}$
$r_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \}$

3) Em cada um dos casos abaixo, represente r e s graficamente, marcando os pontos associados a $t = 0$, $t = 1$, $u = 0$, $u = 1$; encontre no olhômetro o ponto $P \in r \cap s$; encontre (também no olhômetro) os valores de t e u associados a P; e verifique que você encontrou o t e o u certos, fazendo como abaixo.

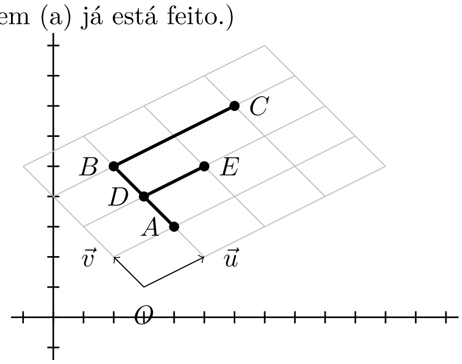


$r = \{ (3, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$s = \{ (4, 1) + u\overrightarrow{(-1, 1)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
$(1, 4) = (3, 3) + (-1)\overrightarrow{(2, -1)} \in r$
$(1, 4) = (4, 1) + 3\overrightarrow{(-1, 1)} \in s$
$(1, 4) \in r \cap s$

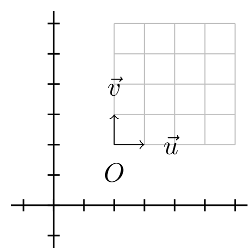
a) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(0, 3)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 4) + u\overrightarrow{(2, 0)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
b) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(3, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 2) + u\overrightarrow{(2, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
c) $r = \{ (1 + 3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (2u, 2 + 3u) \mid u \in \mathbb{R} \}$
d) $r = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (1, 0) + u\overrightarrow{(1, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$
(No d o olhômetro não basta, você vai precisar resolver um sistema)

Exercício:
Em cada uma das figuras abaixo vamos definir o sistema de coordenadas Σ por $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ e
$(a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$.
Sejam:
$B = (1, 3)_\Sigma$, $C = (3, 3)_\Sigma$,
$D = (1, 2)_\Sigma$, $E = (2, 2)_\Sigma$,
$A = (1, 1)_\Sigma$.
Desenhe a figura formada pelos pontos A, B, C, D e E e pelos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.
(O item (a) já está feito.)

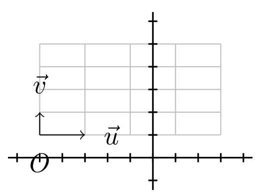
a)



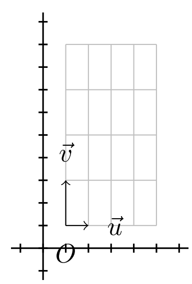
b)



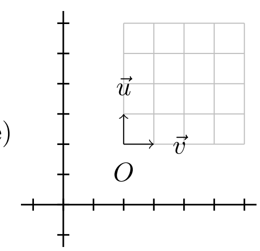
c)



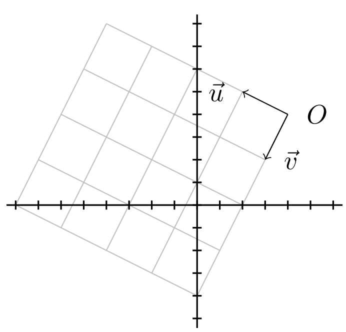
d)



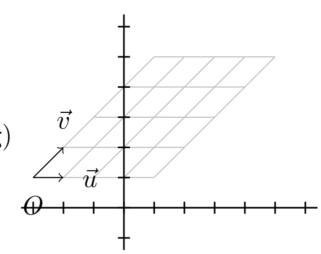
e)



f)

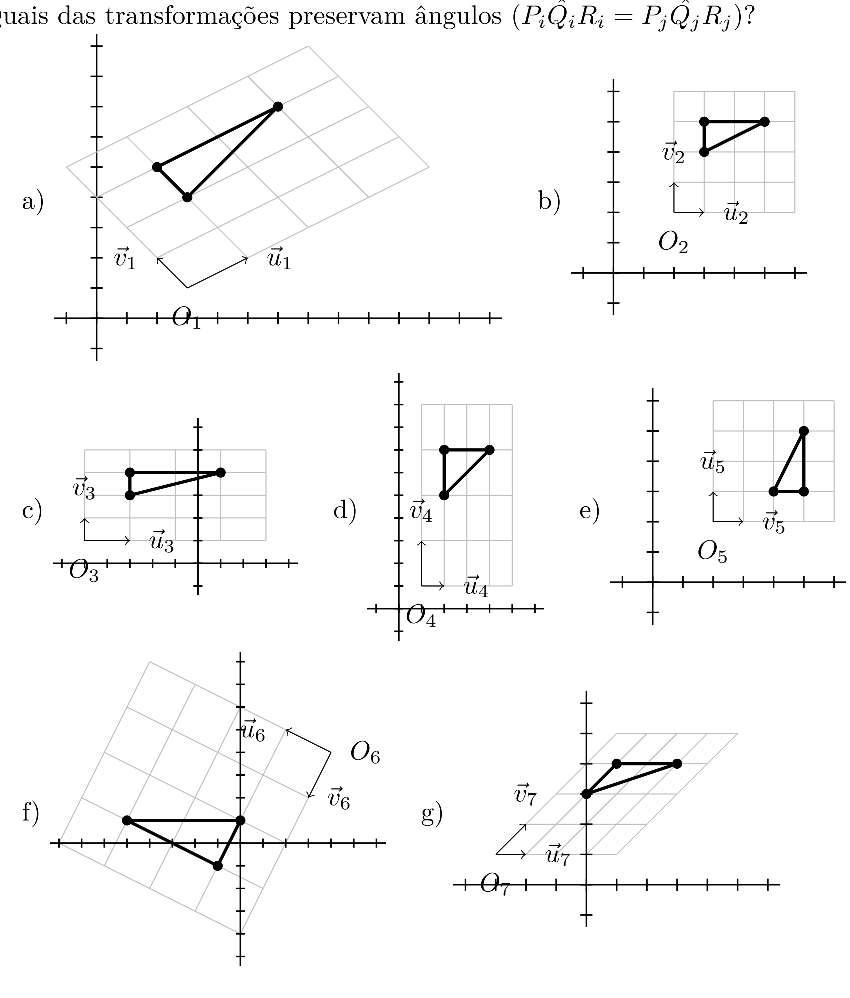


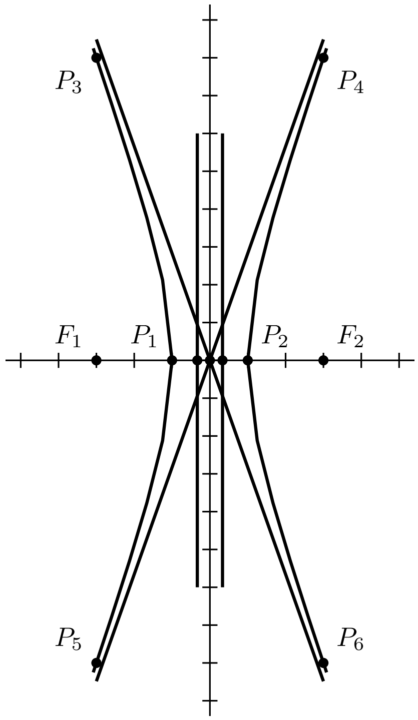
g)



Agora vamos usar uma notação um pouco mais pesada...
$\Sigma_i = (O_i, \vec{u}_i, \vec{v}_i)$,
$\Sigma_0 = ((0,0), \overrightarrow{(1,0)}, \overrightarrow{(0,1)})$,
$(a,b)_{\Sigma_i} = O_i + a\vec{u}_i + b\vec{v}_i$,
$B_i = (1,3)_{\Sigma_i}$, $C_i = (3,3)_{\Sigma_i}$,
$D_i = (1,2)_{\Sigma_i}$, $E_i = (2,2)_{\Sigma_i}$,
$A_i = (1,1)_{\Sigma_i}$.
As figuras abaixo representam os triângulos $D_iB_iC_i$ para $i = 1, \ldots, 7$.

Já vimos que na passagem de um diagrama para outro as figuras - 'F's e triângulos - podem ser transladadas, ampliadas, reduzidas, amassadas, deformadas, espelhadas...
Quais das transformações preservam distâncias ($d(P_i, Q_i) = d(P_j, Q_j)$)?
Quais das transformações preservam ângulos ($P_i\hat{Q}_iR_i = P_j\hat{Q}_jR_j$)?





$e = 3$			
$\vec{x} = \overrightarrow{(1,0)}$			
$\vec{y} = \overrightarrow{(0,1)}$		$\vec{y} = \vec{x}'$	
$a = 1/2$		$a = \lvert\lvert\vec{x}\rvert\rvert/2$	
$b = \sqrt{8}/2$		$b = \sqrt{e^2-1} \cdot a$	
$c = 3/2$		$c = e \cdot a$	
$\vec{u} = \overrightarrow{(1/2, -\sqrt{8}/2)}$		$\vec{u} = a\vec{x} - b\vec{y}$	
$\vec{v} = \overrightarrow{(1/2, \sqrt{8}/2)}$		$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y}$	
$P_1 = (-1, 0)$	$P_2 = (1, 0)$	$P_1 = O - \vec{x}$	$P_2 = O + \vec{x}$
$F_1 = (-3, 0)$	$F_2 = (3, 0)$	$F_1 = O - e\vec{x}$	$F_2 = O + e\vec{x}$
$D_1 = (-\frac{1}{3}, 0)$	$D_2 = (\frac{1}{3}, 0)$	$D_1 = O - \frac{1}{e}\vec{x}$	$D_2 = O + \frac{1}{e}\vec{x}$
$P_3 = (-3, 8)$	$P_4 = (3, 8)$	$P_3 = F_1 + (e^2-1)\vec{y}$	$P_4 = F_2 + (e^2-1)\vec{y}$
$P_5 = (-3, -8)$	$P_6 = (3, -8)$	$P_5 = F_1 - (e^2-1)\vec{y}$	$P_6 = F_2 - (e^2-1)\vec{y}$
$d_1 : (-\frac{1}{3}, y)$	$d_2 : (\frac{1}{3}, y)$	$d_1 : D_1 + t\vec{y}$	$d_2 : D_2 + t\vec{y}$
$\alpha_{\vec{u}} : (\frac{1}{2}t, -\frac{\sqrt{8}}{2}t)$	$\alpha_{\vec{v}} : (\frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{8}}{2}t)$	$\alpha_{\vec{u}} : O + t\vec{u}$	$\alpha_{\vec{v}} : O + t\vec{v}$
$D_0 = O$		$D_0 = O$	
$d_0 : D_0 + t\vec{y}$		$d_0 : D_0 + t\vec{y}$	

Elipses:
Nomes para os pontos mais interessantes:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P_3 & & & \\ D_1 & P_1 & F_1 & O & F_2 & P_2 & D_2 \\ & & & P_4 & & & \end{array}$$

Fórmulas para os pontos quando $P_1 = (-1, 0)$ e $P_2 = (1, 0)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (0, b) & & & \\ (-\frac{1}{c}, 0) & (-1, 0) & (-c, 0) & (0, 0) & (c, 0) & (1, 0) & (\frac{1}{c}, 0) \\ & & & (0, -b) & & & \end{array}$$

onde $b^2 + c^2 = a^2 = 1$.

Uma elipse com $e = 3$, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2$, $d(P, d_1) = 3d(P, F_1)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (0, \frac{\sqrt{8}}{3}) & & & \\ (-3, \_) & (-1, 0) & (-\frac{1}{3}, 0) & (0, 0) & (\frac{1}{3}, 0) & (1, 0) & (3, \_) \\ & & & 0, -\frac{\sqrt{8}}{3}) & & & \end{array}$$

Uma elipse com $e = 3$, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2$, $d(P, d_1) = \frac{2}{3}d(P, F_1)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (0, \frac{\sqrt{5}}{3}) & & & \\ (-\frac{3}{2}, \_) & (-1, 0) & (-\frac{2}{3}, 0) & (0, 0) & (\frac{2}{3}, 0) & (1, 0) & (\frac{3}{2}, \_) \\ & & & 0, -\frac{\sqrt{5}}{3}) & & & \end{array}$$

Uma elipse com $e = 3$, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2$, $d(P, d_1) = \frac{100}{99}d(P, F_1)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (0, \frac{\sqrt{199}}{100}) & & & \\ (-\frac{100}{99}, \_) & (-1, 0) & (-\frac{99}{100}, 0) & (0, 0) & (\frac{99}{100}, 0) & (1, 0) & (\frac{100}{99}, \_) \\ & & & 0, \frac{\sqrt{199}}{100}) & & & \end{array}$$

Hipérboles:

Nomes para os pontos mais interessantes:

$O-\lambda\vec{u}$						$O+\lambda\vec{v}$
P_4						P_5
	$O-\vec{u}$			$O+\vec{v}$		
F_1	P_1	D_1	O	D_2	P_2	F_2
	$O-\vec{v}$			$O+\vec{u}$		
P_6						P_7
$O-\lambda\vec{v}$						$O+\lambda\vec{v}$

Uma com $e=3$, $d(P,F_2)=3d(P,d_2)$, $d(P,F_2)-d(P,F_1)=\pm 2$:

$(-3,3\sqrt{8})$						$(3,3\sqrt{8})$
$(-3,8)$						$(3,8)$
	$(-1/2,\sqrt{8}/2)$			$(1/2,\sqrt{8}/2)$		
$(-3,0)$	$(-1,0)$	$(-1/3,\_)$	$(0,0)$	$(1/3,\_)$	$(1,0)$	$(3,0)$
	$(-1/2,-\sqrt{8}/2)$			$(1/2,-\sqrt{8}/2)$		
$(-3,-8)$						$(3,-8)$
$(-3,-3\sqrt{8})$						$(3,-3\sqrt{8})$