Cálculo 2
PURO-UFF - 2016.2
P2 - 21/dez/2016 - Eduardo Ochs
Links importantes:
http://angg.twu.net/2016.2-C2.html (página do curso)
http://angg.twu.net/2016.2-C2/2016.2-C2.pdf (quadros)
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

1) **(Total: 4.0)**
a) **(1.0 pts)** Encontre as duas soluções da forma $e^{(a+ib)x}$ de $f'' + 6f' + 13f = 0$.
b) **(0.5 pts)** Encontre as duas soluções da forma $e^{(a+ib)x}$ de $f'' + 3f' - 10f = 0$.
c) **(1.0 pts)** Encontre a e b para os quais $e^{-x} \operatorname{sen} x$ é solução de de $f'' + af' + bf = 0$.
d) **(1.0 pts)** Encontre as soluções básicas reais de $f'' + 6f' + 13f = 0$.
e) **(0.5 pts)** Encontre uma solução de $f'' + 3f' - 10f = 0$ que obedece $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

2) **(Total: 2.0)** Considere esta EDO:

$$\operatorname{sen}(2x)\,dx = \operatorname{sen}(5y)\,dy$$

a) **(1.0 pts)** Resolva-a por variáveis separáveis.
b) **(0.5 pts)** Teste a sua solução geral.
c) **(0.5 pts)** Encontre uma solução com $f(0) = 0$.

3) **(Total: 3.0)** Prove que a EDO abaixo é exata e resolva-a:

$$\left(\frac{xy^2}{xy^2+3} + \ln(xy^2+3) - y \operatorname{sen} x\right) dx + \left(\frac{2x^2y}{xy^2+3} + \ln(xy^2+3) - \cos x\right) dy = 0$$

Dica: quanto é $\frac{d}{dx}\ln(h(x))$? E $\frac{d}{dx}g(x)\ln(h(x))$?

4) **(Total: 1.0)** Considere a EDO: $f'(x) = (y-2)/x$.
a) **(0.5 pts)** Represente graficamente o campo vetorial associado a ela.
b) **(0.5 pts)** Encontre uma solução pra ela que tenha $f(1) = 1$ e represente graficamente esta solução sobre o campo vetorial do item anterior.

Mini-gabarito (incompleto e ainda não revisado):

1a) $0 = f'' + 6f' + 13f = (D^2 + 6D + 13)f = (D^2 + (2 \cdot 3)D + (2^2 + 3^2))f$
$= (D + (3 + 2i))(D + (3 - 2i))f$
$(D + (3 + 2i))f = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 = e^{-(3+2i)x} = e^{(-3-2i)x}$
$(D + (3 - 2i))f = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2 = e^{-(3-2i)x} = e^{(-3+2i)x}$

1b) $0 = f'' + 3f' - 10f = (D^2 + 3D - 10)f = (D + 5)(D - 2)f$
$f_1 = e^{-5x}$
$f_2 = e^{2x}$

1c)
$f_1 = e^{-x} \cos x = e^{-x}(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}) = \frac{1}{2}e^{(-1+i)x} + \frac{1}{2}e^{(-1-i)x}$
$f_2 = e^{-x} \operatorname{sen} x = e^{-x}(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}) = \frac{1}{2i}e^{(-1+i)x} - \frac{1}{2i}e^{(-1-i)x}$
$f_3 = e^{(-1+i)x}$
$f_4 = e^{(-1-i)x}$
EDO: $0 = (D - (-1 + i))(D - (-1 - i)f = (D^2 + 2D + (-1 + i)(-1 - i))f$
$= (D^2 + 2D + 2)f$
$a = 2$, $b = 2$

1d) $f_1 = e^{-3x}e^{-2ix}$, $f_2 = e^{-3x}e^{2ix}$
$f_3 = e^{-3x}(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}) = e^{-3x} \cos 2x$
$f_4 = e^{-3x}(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}) = e^{-3x} \operatorname{sen} 2x$

1e) $f_1 = e^{-5x}$, $f_2 = e^{2x}$
$f_3(x) = ae^{-5x} + be^{2x}$
$f_3'(x) = -5ae^{-5x} + 2be^{2x}$
$f_3(0) = a + b \;\; (= 0)$
$f_3'(0) = -5a + 2b \;\; (= 1)$
$a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$
$-5a + 2b = 1 \quad \Rightarrow \quad -5a - 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{7}$
$f_3(x) = -\frac{1}{7}e^{-5x} + \frac{1}{7}e^{2x}$

2) $\underbrace{\operatorname{sen}(2x)}_{f(x)} dx = \underbrace{\operatorname{sen}(5y)}_{g(y)} dy$
$\int f(x)dx = \int g(y)dy \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C_1$
$\cos(5y) = \frac{5}{2}\cos(2x) + C_2$
$5y = \arccos(\frac{5}{2}\cos(2x) + C_2)$
$y = \frac{1}{5}\arccos(\underbrace{\frac{5}{2}\cos(2x) + C_2}_{h(x)})$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\arccos'(h(x))h'(x) = \frac{1}{5}$

3) Sejam:
$z_x = \frac{xy^2}{xy^2+3} + \ln(xy^2+3) - y \operatorname{sen} x$,
$z_y = \frac{2x^2y}{xy^2+3} + \ln(xy^2+3) - \cos x$.
A EDO é $z_x dx + z_y dy = 0$, e temos $(z_x)_y \neq (z_y)_x$...
era pra ela ser exata, mas cometi algum erro de digitação...

4a) $f'(x) = a$ em $y = 2 + ax$.
4b) Em $(x, y) = (1, 1)$ temos $f'(x) = -1$. A solução é $y = 2 - x$.