Geometria Analítica
PURO-UFF - 2017.1
P1 - 7/jun/2017 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (2,0)$ e $B = (3,1)$.
a) **(1.0 pts)** Represente graficamente $r_0 = \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \,\}$.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente $r_2 = \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \,\}$.

2) **(Total: 1.0)** Prove que se $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos então
a) **(0.5 pts)** $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w} = \vec{w}$ é falso em geral,
b) **(0.5 pts)** $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w} = \vec{w}$ é verdadeiro quando $\vec{u} \perp \vec{v}$.

3) **(Total: 2.5)** Seja $r : \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.
a) **(1.0 pts)** Encontre um ponto $P \in \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \,\}$ tal que $d(P,r) = 1$.
b) **(1.5 pts)** Dê as equações de duas retas diferentes, s e s', paralelas a r e tais que $d(r,s) = s(r,s') = 2$.

4) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (1,1)$, $B = (3,1)$, $C = (3,2)$, $A' = (4,1)$, $B' = (7,2)$.
a) **(1.0 pts)** Encontre um ponto C' que faça os triângulos ABC e $A'B'C'$ serem semelhantes.
b) **(1.0 pts)** Verifique que $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$ e que $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$.

5) **(Total: 2.5)** Sejam C o círculo de centro $C_0 = (0,2)$ e raio $R = 2$, C' o círculo de centro $C_0' = (1,0)$ e raio $R = 1$, r a reta que passa por C_0 e C_0'; sejam I e I' os dois pontos de $C \cap C'$, s a reta que passa por I e i', A o ponto de interseção entre r e s.
a) **(0.1 pts)** Dê as coordenadas de I.
b) **(0.3 pts)** Dê a equação de s.
c) **(0.4 pts)** Dê as coordenadas de A.
d) **(1.0 pts)** Represente tudo graficamente e encontre I' por simetria.
e) **(0.7 pts)** Encontre I' pelo método algébrico.

Mini-gabarito:
(sem o desenvolvimento, sem desenhos, não-revisado)

1a) $r_0 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x-2,y)} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 0 \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2-x \,\}$
1b) $r_2 = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x-2,y)} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 2 \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-x \,\}$

2a) Contra-exemplo: se $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(2,0)}$, $a=1$, $b=1$ então $\vec{w} = \overrightarrow{(3,0)}$ mas $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w} = \overrightarrow{(6,0)}$.
2b)
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w} & = & \frac{\vec{u}\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + \frac{\vec{v}\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} \\ & = & \frac{a\vec{u}\cdot\vec{u}+b\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + \frac{a\vec{v}\cdot\vec{u}+b\vec{v}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} \\ & = & \frac{a\vec{u}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + \frac{b\vec{v}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} \\ & = & a\vec{u} + b\vec{v} \\ & = & \vec{w} \end{array}$$

3) Sejam $A = (0,3)$, $B = (4,0)$. Então $r = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - \frac{3}{4}x \,\}$ e r passa por A e B. Além disso:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{4}{5}, \\ d((x,y),r) = \frac{4}{5}d((x,y),(x,4-\frac{3}{4}x)) = \frac{4}{5}|(4-\frac{3}{4}x)-y|, \\ d((0,3+h),r) = \frac{4}{5}d((0,3+h),(0,3)) = \frac{4}{5}|h|, \\ d((0,3+2\frac{5}{4}),r) = 2, \qquad (0,3+2\frac{5}{4}) = (0,5.5), \\ d((0,3-2\frac{5}{4}),r) = 2, \qquad (0,3-2\frac{5}{4}) = (0,0.5). \end{array}$$

3a) Queremos $y = 2x$ e $d((x,y),r) = \frac{4}{5}|(4-\frac{3}{4}x)-y| = 1$. As soluções são $(1,2)$ e $(21/11, 42/11)$.
3b) $s : y = 5.5 - \frac{3}{4}x$ e $s' : y = 0.5 - \frac{3}{4}x$.

4a) Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(2,0)}$; repare que $\vec{w} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(0,1)}$ é $\vec{v}$ rodado 90° e multiplicado por $\frac{1}{2}$. Podemos fazer a mesma coisa com A' e B': $\vec{v}' = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{(3,1)}$, e rodando isto 90° e multiplicando por $\frac{1}{2}$ obtemos $\vec{w}' = \overrightarrow{(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})}$. O ponto C' pode ser $B' + \vec{w} = (6.5, 3.5)$ ou $B' - \vec{w} = (7.5, 0.5)$.
4b) $\cos \mathrm{ang}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \mathrm{ang}(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}) = 0$;
$\cos \mathrm{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos \mathrm{ang}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

5a) $I = (0,0)$
5b) $y = x/2$
5c) $A = (0.8, 0.4)$
5d) $I' = (1.6, 0.8)$
5e) $I' = (1.6, 0.8)$