Geometria Analítica
PURO-UFF - 2017.1
VS - 19/jul/2017 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.5)** Sejam $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 4y = 2 \}$, $A = (5, 6)$, $B = (4, 0)$. $C$ o círculo de centro $A$ e raio $R$, $C'$ o círculo de centro $B$ e raio $R'$.
a) **(1.0 pts)** Encontre o valor de $R$ que faz com que $r$ e $C$ sejam tangentes um ao outro.
b) **(1.5 pts)** Encontre os dois valores de $R'$ que fazem com que $C'$ seja tangente ao $C$ do item anterior.

2) **(Total: 2.0)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(2 - x) = 0 \}, \\ S' & = & \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(2 - x) = 1 \}, \\ S'' & = & \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(2 - x) = 2 \}. \end{array}$$

a) **(0.2 pts)** Represente graficamente $S$.
b) **(0.4 pts)** Represente graficamente $S'$.
c) **(0.6 pts)** Represente graficamente $S''$.
d) **(0.8 pts)** Dê as coordenadas de quatro pontos de $S''$.

3) **(Total: 2.0)** Encontre os focos da elipse $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x-2}{3})^2 + (\frac{y-4}{5})^2 = 1 \}$.

4) **(Total: 2.5)** Sejam $A = (3, 0, 0)$, $B = (5, 2, 2)$, $C = (4, 5, 6)$ e

$$\begin{array}{rcl} \pi & = & \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x, z, y), A) = d((x, y, z), B) \}, \\ \pi' & = & \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x, z, y), A) = d((x, y, z), C) \}. \end{array}$$

a) **(0.2 pts)** Encontre uma equação da forma $ax + by + cz = d$ para o plano $\pi$.
b) **(0.3 pts)** Encontre uma equação da forma $ax + by + cz = d$ para o plano $\pi'$.
c) **(1.0 pts)** Dê uma parametrização para a reta $r = \pi \cap \pi'$.
d) **(1.0 pts)** Verifique se a sua reta $r$ está certa — teste coisas como ortogonalidades, distâncias, paralelismo, etc, e deixe claro qual teste você está fazendo a cada momento.

5) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (2, 0, 0)$, $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $B = (0, 4, 0)$, $\vec{v} = (0, 5, 5)$, $r = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ B + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$.
a) **(1.0 pts)** Dê a equação de um plano $\pi$ que seja paralelo a $r$ e $s$ e equidistante de ambas.
b) **(1.0 pts)** Verifique se a seu plano $\pi$ está certo, como no item 4d.

**Mini-gabarito** (não revisado!!!)

1) A reta $r$ passa pelos pontos $D = (0, \frac{1}{2})$ e $E = (\frac{2}{3}, 0)$. Os vetores $\vec{n} = \overrightarrow{(3,4)}$ e $\vec{n}' = \overrightarrow{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})}$ (unitário) são normais à reta $r$. Temos $d(A,r) = \overrightarrow{DA} \cdot \vec{n}' = \overrightarrow{(5, 5.5)} \cdot \overrightarrow{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})} = 3 + \frac{11}{10}4 = 7.4$.
1a) $R = d(A,r) = 7.4$.
1b) $d(A,B) = \sqrt{37}$; $R' = d(A,B) \pm R = \sqrt{37} \pm 7.4$.

2) Sejam $u = x + y$ e $v = 2 - x$.
2a) $u = 0 \;\Rightarrow\; y = -x$, $v = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$.
2b) $u = 1 \;\Rightarrow\; y = 1 - x$, $v = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$, $(u,v) = (1,1) \;\Rightarrow\; (x,y) = (1,0)$.
2c)
2d)

| $u$ | $v$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| $-1$ | $-2$ | 4 | $-5$ |
| $-2$ | $-1$ | 3 | $-5$ |

3) Pontos óbvios da elipse: $(2, 4 \pm 5)$, $(2 \pm 3, 4)$. Focos: $(2, 4 \pm 4)$.

4) $\frac{A+B}{2} = (4,1,1)$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(2,2,2)} = \vec{n}$, $\frac{A+C}{2} = (3.5, 2.5, 3)$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(1,5,6)} = \vec{n}'$.
4a) $\pi : x + y + z = 6$
4b) $\pi' : x + 5y + 6z = 34$
4c) $r = \{\, (x, 2 - 5x, 4 - 6x) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$; $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-5,-6)}$, $P_0 = (0,2,4) \in \mathbb{R}$, $P_1 = (1,-3,-2) \in \mathbb{R}$.
4d) $P_0 \in \pi$, $P_1 \in \pi$, $P_0 \in \pi'$, $P_1 \in \pi'$, $\vec{v} \perp \vec{n}$, $\vec{v} \perp \vec{n}'$, ...

5a) $\frac{A+B}{2} = (1,2,0)$, $\vec{n} = \overrightarrow{(1,-1,1)}$, $\pi : x - y + z = -1$
5b) Seja $F(x,y,z) = x - y + z + 1$. Alguns testes:
$F(2,0,0) = F(5,3,0) = 3$
$F(0,4,0) = F(0,9,5) = -3$