Cálculo 2
PURO-UFF - 2017.2
P1 - 13/nov/2017 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Calcule

$$\int (\cos x)^6 \, dx.$$

2) **(Total: 3.0)** Calcule

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

3) **(Total: 2.0)** Calcule

$$\int \frac{x^3}{x^2+3x-10}\, dx.$$

4) **(Total: 2.0)** Sejam $F(a,b) = \int_{x=a}^{x=b} |1-x^4|\, dx$ e $G(b) = F(0,b)$.
a) **(0.5 pts)** Calcule $F(0,2)$.
b) **(1.5 pts)** Dê uma definição por casos para $G(b)$.

5) **(Total: 1.5)** Sejam (SD) e (SI) as fórmulas para integração por substituição na integral definida e na integral indefinida, e (WI) uma integração por substituição que demonstramos no curso usando "bloquinhos de substituições":

$$
\begin{array}{ll}
(SD) & \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\, du\right) \\
(SI) & \left(\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du\right) \\
(WI) & \left(\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^2\cos\theta\, d\theta = \int s^3(1-s^2)\, ds\right) \quad \begin{bmatrix} s{=}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta{\to}s \\ \frac{ds}{d\theta}{=}\cos\theta \\ \cos\theta\, d\theta{\to}ds \\ (\cos\theta)^2{\to}(1{-}s^2) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

a) **(0.1 pts)** O que é $(SD)\begin{bmatrix} f(u){:=}\operatorname{sen} u \\ g(x){:=}x^2 \\ a{:=}3 \\ b{:=}4 \end{bmatrix}$?
b) **(0.4 pts)** Adicione limites de integração na fórmula (WI) para obter uma fórmula "(WD)" que calcula (ou melhor, "simplifica") a integral definida (WDL) abaixo; note que falta pôr os limites de integração no "lado direito" ("(WDR)").

$$(WDL) \qquad \int_{\theta=a}^{\theta=b} (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^2\cos\theta\, d\theta.$$

c) **(1.0 pts)** Encontre uma substituição simultânea que aplicada a (SD) demonstra (WD).

Mini-gabarito (não revisado):

1) $(\cos\theta)^6 = (\frac{E+E^{-1}}{2})^6 = \frac{1}{64}(E^6+6E^4+15E^2+20+15E^{-2}+6E^{-4}+E^{-6})$
$= \frac{1}{32}\frac{1}{2}(E^6+E^{-6}+6(E^4+E^{-4})+15(E^2+E^{-2})+20)$
$= \frac{1}{32}(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10)$
$\int(\cos x)^6\,dx = \frac{1}{32}\int(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)\,dx$
$= \frac{1}{32}(\frac{\operatorname{sen} 6x}{6} + \frac{6\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{15\operatorname{sen} 2x}{2} + 10x)$

2) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2})$

3) $\int\frac{x^3}{x^2+3x-10}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{8}{7}\ln|x-2| + \frac{125}{7}\ln|x+5|$

4) Sejam $f(x) = |1-x^4|$, $h(x) = 1-x^4$. Então $f(x) = h(x)$ em $[-1,1]$, $f(x) = -h(x)$ em $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$. Seja $H(x) = \int h(x)\,dx = x - \frac{x^5}{5}$; $H(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em $[-1,1]$, e no resto da reta podemos usar $-H(x)$ como primitiva de $f(x)$.
4a) $F(0,2) = \int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx + \int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = H(x)|_{x=0}^{x=1} + (-H(x))|_{x=1}^{x=2}$
$= (H(1)-H(0)) + (-H(2)+H(1)) = -H(0) + 2H(1) - H(2)$
$= 2(1-\frac{1}{5}) - (2-\frac{32}{5}) = \frac{33}{5}$

$$4b)\ G(b) = \begin{cases} H(x)|_{x=0}^{x=-1} + (-H(x))|_{x=-1}^{x=b} & \text{se } b \le -1 \\ H(x)|_{x=0}^{x=b} & \text{se } 1 \le b \le -1 \\ H(x)|_{x=0}^{x=1} + (-H(x))|_{x=1}^{x=b} & \text{se } 1 \le b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (H(-1)-H(0)) + (-H(b)+H(-1)) & \text{se } b \le -1 \\ H(b)-H(0) & \text{se } 1 \le b \le -1 \\ (H(1)-H(0)) + (-H(b)+H(1)) & \text{se } 1 \le b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2H(-1)-H(b) & \text{se } b \le -1 \\ H(b) & \text{se } 1 \le b \le -1 \\ 2H(1)-H(b) & \text{se } 1 \le b \end{cases} = \begin{cases} -\frac{8}{5} - b + \frac{b^5}{5} & \text{se } b \le -1 \\ b - \frac{b^5}{5} & \text{se } 1 \le b \le -1 \\ \frac{8}{5} - b + \frac{b^5}{5} & \text{se } 1 \le b \end{cases}$$

5a) $\left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du\right)\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=x^2 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix}$
$= \left(\int_{x=3}^{x=4}\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx = \int_{u=3^2}^{u=4^2}\operatorname{sen}(u)\,du\right)$
5b) $\int_{\theta=a}^{\theta=b}(\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^2\cos\theta\,d\theta = \int_{s=\operatorname{sen} a}^{s=\operatorname{sen} b} s^3(1-s^2)\,ds$
5c) $\left(\int_{\theta=a}^{\theta=b} f(g(\theta))g'(\theta)\,d\theta = \int_{s=g(a)}^{s=g(b)} f(s)\,ds\right)\begin{bmatrix} f(s):=s^3(1-s^2) \\ g(\theta):=\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$
$= \left(\int_{\theta=a}^{\theta=b}(\operatorname{sen}\theta)^3(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta = \int_{s=\operatorname{sen} a}^{s=\operatorname{sen} b} s^3(1-s^2)\,ds\right)$