

Cálculo 2  
 PURO-UFF - 2017.2  
 P2 - 11/dez/2017 - Eduardo Ochs  
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.  
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

- 1) **(Total: 2.0)** Seja (\*) a seguinte EDO:  $f'' + 4f - 12f = 0$ .
- (0.5 pts)** Expresse (\*) na forma  $(D - a)(D - b)f = 0$ .
  - (0.5 pts)** Encontre as soluções básicas de (\*).
  - (0.2 pts)** Encontre uma solução de (\*) que obedeça  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ .
  - (0.3 pts)** Encontre uma solução de (\*) que obedeça  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ .
  - (0.5 pts)** Encontre uma solução de (\*) que obedeça  $f(0) = 4$ ,  $f'(0) = 5$ .
- 2) **(Total: 3.5)** Seja (\*\*) a seguinte EDO:  $f'' + 6f' + 13f = 0$ .
- (1.0 pts)** Expresse (\*\*) na forma  $(D - a)(D - b)f = 0$ .
  - (1.0 pts)** Encontre as soluções básicas de (\*\*).
  - (1.0 pts)** Encontre as soluções reais de (\*\*).
  - (0.5 pts)** Teste as soluções que você encontrou no item anterior.
- 3) **(Total: 2.5)** Seja (\*\*\*) a seguinte EDO:  $\frac{d}{dx}y = x^2 e^{-3y}$ .
- (1.5 pts)** Encontre a solução geral de (\*\*\*)
  - (1.0 pts)** Encontre uma solução de (\*\*\*) que passa pelo ponto  $(a, b)$ .
- 4) **(Total: 2.0)** Seja (\*\*\*\*) a seguinte EDO:  $(-2x + 6)dx + (2y + 8)dy = 0$ .
- (0.5 pts)** Verifique que (\*\*\*\*) é exata.
  - (1.0 pts)** Encontre a solução geral de (\*\*\*\*).
  - (0.5 pts)** Encontre uma solução de (\*\*\*\*) que passa pelo ponto  $(a, b)$ .

**Gabarito:** (não revisado)

1a)  $(D - 2)(D + 6)f = 0$

1b)  $f_1 = e^{-6x}$ ,  $f_2 = e^{2x}$

1c)  $\frac{1}{4}f_1 + \frac{3}{4}f_2$

1d)  $-\frac{1}{8}f_1 + \frac{1}{8}f_2$

1e)  $\frac{3}{8}f_1 + \frac{29}{8}f_2$

2a)  $(D - (-3 + 2i))(D - (-3 - 2i))f = 0$

2b)  $f_1 = e^{(-3+2i)x}$ ,  $f_2 = e^{(-3-2i)x}$ .

2c)  $f_3 = \cos(2x) \cdot e^{-3x}$ ,  $f_4 = \sin(2x) \cdot e^{-3x}$ .

2d)  $f'_3 = -3f_3 - 2f_4$ ,  $f'_4 = 2f_3 - 3f_4$ ,

$$f''_3 = -3f'_3 - 2f'_4 = -3(-3f_3 - 2f_4) - 2(2f_3 - 3f_4) = 5f_3 + 12f_4,$$

$$f''_4 = 2f'_3 - 3f'_4 = 2(-3f_3 - 2f_4) - 3(2f_3 - 3f_4) = -12f_3 + 5f_4,$$

$$f'_3 + 6f'_4 + 13f_3 = (5f_3 + 12f_4) + 6(-3f_3 - 2f_4) + 13f_3 = 0,$$

$$f''_4 + 6f'_3 + 13f_4 = (-12f_3 + 5f_4) + 6(2f_3 - 3f_4) + 13f_4 = 0.$$

3a)  $\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-3y} \Rightarrow e^{3y} dy = x^2 dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} e^{3y} = \int e^{3y} dy = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C \Rightarrow e^{3y} = x^3 + C \Rightarrow 3y = \ln(x^3 + C)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3} \ln(x^3 + C)$$

3b)  $b = \frac{1}{3} \ln(a^3 + C) \Rightarrow \ln(a^3 + C) = 3b \Rightarrow a^3 + C = e^{3b} \Rightarrow C = e^{3b} - a^3$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3 + (e^{3b} - a^3))$$

4a)  $G = -2x + 6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $H = 2y + 8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $G_y = 0 = H_x$ ;  $Gdx + Hdy = 0$  é exata, e existe  $F$  tal que  $F_x = G$  e  $F_y = H$ .

4b)  $F = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $F(x, y) = C_1 \Rightarrow y^2 + 8y + 6x - x^2 = C_1 \Rightarrow y^2 + 8y = C_1 - 6x + x^2 \Rightarrow (y+4)^2 = x^2 - 6x + 16 + C_1 \Rightarrow y + 4 = \pm \sqrt{x^2 - 6x + C}$ , onde  $C = 16 + C_1$ ;  $y = -4 \pm \sqrt{x^2 - 6x + C}$ .

4c)  $b = -4 \pm \sqrt{a^2 - 6a + C} \Rightarrow b + 4 = \pm \sqrt{a^2 - 6a + C} \Rightarrow (b+4)^2 = a^2 - 6a + C \Rightarrow C = (b+4)^2 + 6a - a^2$ ;  $y = -4 \pm \sqrt{x^2 - 6x + ((b+4)^2 + 6a - a^2)}$ .