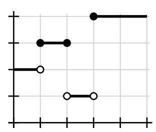
Índice de seções:

1 Funções-escada e funções definidas por casos 1
2 Áreas como somas de retângulos 1
3 Os métodos L, R, max, min, etc 1
4 Sups, infs e imagens de intervalos 2
5 Partições de um intervalo 2
6 Partições cada vez mais finas 3
7 Funções integráveis e não integráveis 3
8 TFC1 3
9 TFC2 3
10 Integração por substituição 3
11 Apagando os limites de integração 3

1 Funções-escada e funções definidas por casos

Funções usadas na aula de 12/mar/2018:

$f(x) =$ 

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{quando } x \leq 2 \\ 2 & \text{quando } 2 < x < 3 \\ 4 & \text{quando } x = 3 \\ 0 & \text{quando } 3 < x \end{cases}$$

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

2 Áreas como somas de retângulos

Exercícios:

a) Represente graficamente $\Sigma_{i=1}^{N}(b_i - a_i) \cdot c_i$ para esta tabela: $\begin{array}{cccc} i & a_i & b_i & c_i \\ \hline 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{array}$

b) Seja $P = \{0, 0.5, 1, 2, 3.5, 5\}$. Isto é uma partição de que intervalo? Quem são $N, a, b, a_1, b_1, a_2, b_2$, etc? Monte a tabela (sem a coluna dos 'c_i's).

c) Represente graficamente $\Sigma_{i=1}^{N}(b_i - a_i) \cdot f(a_i)$ no caso em que $P = \{0, 1, 3, 4\}$ e $f(x) = 4 - (x-2)^2$.

d) Represente graficamente $\Sigma_{i=1}^{N}(b_i - a_i) \cdot f(a_i)$ no caso em que $P = \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 4\}$ e $f(x) = 4 - (x-2)^2$.

Truque importante: no item (d) acima como a gente só quer *representar graficamente* $\Sigma_{i=1}^{N}(b_i - a_i) \cdot f(a_i)$ a gente não precisa *calcular* $f(0)$, $f(0.5)$, $f(1)$, $\ldots$, $f(4)$ — a gente pode encontrar esses valores pelo gráfico.

3 Os métodos L, R, max, min, etc

Exercício. Seja $f(x) = 4 - (x-2)^2$. Represente graficamente $\Sigma_{i=1}^{N} c_i\,(b_i - a_i)$ para cada uma das partições acima e para cada um dos modos abaixo de calcular c_i; o truque é interpretar cada termo $c_i\,(b_i - a_i)$ do somatório como um retângulo cuja base é o intervalo (a_i, b_i) e cuja altura é c_i. Além disso calcule o resultado de cada somatório para as partições $P_1, \ldots, P_4$ — as contas para a partição P_5 são mais chatas e não valem a pena.

a)	$c_i = f(a_i)$	("L")
b)	$c_i = f(b_i)$	("R")
c)	$c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$	("max")
d)	$c_i = \min(f(a_i), f(b_i))$	("min")
e)	$c_i = f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$	("ponto médio")
f)	$c_i = \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}$	("trapézio")
g)	$c_i = \sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x)$	("sup")
h)	$c_i = \inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x)$	("inf")

Obs: cada um dos itens (a)–(h) acima corresponde a um método de integração numérica; o nome do método está entre aspas à direita.

4 Sups, infs e imagens de intervalos

5 Partições de um intervalo

Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um conjunto $P \subset [a, b]$ finito e tal que $a, b \in P$. Uma partição P de $[a, b]$ com $N + 1$ pontos divide o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos consecutivos — por exemplo, $P = \{2, 2.5, 3, 5, 7\}$ é uma partição do intervalo $[a, b] = [2, 7]$ e P divide o intervalo $[2, 7]$ em: $I_1 = [2, 2.5]$, $I_2 = [2.5, 3]$, $I_3 = [3, 5]$, $I_4 = [5, 7]$. Nós vamos chamar as extremidades destes intervalos de a_i e b_i...

Seja P um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$. A gente pode listar os elementos de P em ordem: $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Esse conjunto P vai ser uma "partição" do intervalo $[a, b] = [a_1, a_n]$ em $n - 1$ subintervalos, $I_1 = [a_1, a_2]$, $I_2 = [a_2, a_3]$, $\ldots$, $I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n]$, em que cada subintervalo tem exatamente um ponto em comum com o seguinte.

Tudo vai ficar mais fácil se a gente usar estas convenções: P tem $N+1$ pontos, $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_{N+1}\}$, com $a_1 < a_2 < \ldots < a_{N+1}$; $b_i = a_{i+1}$; $I_i = [a_i, b_i]$; $a = a_1$ e $b = b_N$; com isto o conjunto P vai ser uma partição do intervalo $[a, b] = [a_1, b_N] = [a_1, a_{N+1}]$ em N subintervalos, $I_1, \ldots, I_N$.

Dica: faça uma tabela! Por exemplo, se $P = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ então P é uma partição do intervalo $[a, b] = [3, 10]$ em $N = 5$ subintervalos:

i	a_i	b_i	I_i
1	3	4	$[3,4]$
2	4	6	$[4,6]$
3	6	8	$[6,8]$
4	8	9	$[8,9]$
5	9	10	$[9,10]$

Exercício: sejam $P_1, \ldots, P_5$ as seguintes partições do intervalo $[0,4]$ (nós vamos usá-las no exercício seguinte). Faça a tabela correspondente a ela.

$P_1 = \{0,1,2,3,4\}$,

$P_2 = \{0,1,3,4\}$,

$P_3 = \{0,4\}$,

$P_4 = \{0,2,4\}$,

$P_5 = \{0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4\}$,

6 Partições cada vez mais finas

7 Funções integráveis e não integráveis

8 TFC1

9 TFC2

$$(TFC2a) \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \right)$$

$$(TFC2b) \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)|_{x=a}^{x=b} \right)$$

10 Integração por substituição

$$(S1) \quad = \quad \begin{pmatrix} f(g(x))|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$(S2) \quad = \quad \begin{pmatrix} F(g(x))|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$(S3) \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

11 Apagando os limites de integração

Programa do curso

Vamos fazer essencialmente o que está em

http://angg.twu.net/e/puro.e.html#ementa-e-programa-C2

mas também vamos ver o básico de algumas ferramentas extras que vão simplificar algumas partes do curso: linearização e diferenciais, série de Taylor, números complexos, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, e um pouquinho de notação λ pra gente poder resolver algumas ambiguidades de notação na parte sobre o operador D (a derivada vista como operador linear).

O operador de substituição

op-substituicao

Funções definidas por casos e funções-escada

Partições

Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um conjunto $P \subset [a, b]$ finito e tal que $a, b \in P$.

Seja P um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$. A gente pode listar os elementos de P em ordem: $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Esse conjunto P vai ser uma "partição" do intervalo $[a, b] = [a_1, a_n]$ em $n - 1$ subintervalos, $I_1 = [a_1, a_2]$, $I_2 = [a_2, a_3]$, …, $I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n]$, em que cada subintervalo tem exatamente um ponto em comum com o seguinte.

Tudo vai ficar mais fácil se a gente usar estas convenções: P tem $N+1$ pontos, $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_{N+1}\}$, com $a_1 < a_2 < \ldots < a_{N+1}$; $b_i = a_{i+1}$; $I_i = [a_i, b_i]$; $a = a_1$ e $b = b_N$; com isto o conjunto P vai ser uma partição do intervalo $[a, b] = [a_1, b_N] = [a_1, a_{N+1}]$ em N subintervalos, I_1, …, I_N.

Dica: faça uma tabela! Por exemplo, se $P = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ então P é uma partição do intervalo $[a, b] = [3, 10]$ em $N = 5$ subintervalos:

i	a_i	b_i	I_i
1	3	4	$[3, 4]$
2	4	6	$[4, 6]$
3	6	8	$[6, 8]$
4	8	9	$[8, 9]$
5	9	10	$[9, 10]$

Exercício: sejam $P_1, \ldots, P_5$ as seguintes partições do intervalo $[0, 4]$ (nós vamos usá-las no exercício seguinte). Faça a tabela correspondente a ela.

$P_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
$P_2 = \{0, 1, 3, 4\}$,
$P_3 = \{0, 4\}$,
$P_4 = \{0, 2, 4\}$,
$P_5 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$,

Somatórios como áreas

Exercício. Seja $f(x) = 4 - (x - 2)^2$. Represente graficamente $\Sigma_{i=1}^{N} c_i\,(b_i - a_i)$ para cada uma das partições acima e para cada um dos modos abaixo de calcular c_i; o truque é interpretar cada termo $c_i\,(b_i - a_i)$ do somatório como um retângulo cuja base é o intervalo (a_i, b_i) e cuja altura é c_i. Além disso calcule o resultado de cada somatório para as partições P_1, …, P_4 — as contas para a partição P_5 são mais chatas e não valem a pena.

a)	$c_i = f(a_i)$	("L")
b)	$c_i = f(b_i)$	("R")
c)	$c_i = \max(f(a_i), f(b_i))$	("max")
d)	$c_i = \min(f(a_i), f(b_i))$	("min")
e)	$c_i = f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)$	("ponto médio")
f)	$c_i = \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2}$	("trapézio")
g)	$c_i = \sup_{x \in [a_i, b_i]} f(x)$	("sup")
h)	$c_i = \inf_{x \in [a_i, b_i]} f(x)$	("inf")

Obs: cada um dos itens (a)–(h) acima corresponde a um método de integração numérica; o nome do método está entre aspas à direita.

Algumas operações sobre conjuntos:
União: $\{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
Interseção: $\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5,6\} = \{3,4\}$
“Exceto”: $\{1,2,3,4\} \backslash \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$

Completando funções

Digamos que P seja uma partição do intervalo $[a,b]$ e g seja uma função de $[a,b]\backslash P$ em $\mathbb{R}$. Temos quatro jeitos naturais de “completar os buracos” da função g e transformá-la numa função de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$. O primeiro é:

$$g_L(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [a,b]\backslash P \\ \lim_{t\to a^+} g(t) & \text{se } x = a \\ \lim_{t\to b^-} g(t) & \text{se } x = b \\ \lim_{t\to x^+} g(t) & \text{se } x \in P\backslash\{a,b\} \end{cases}$$

Os outros três só diferem desse no último caso. Quando $x \in P\backslash\{a,b\}$, temos:
$g_R(x) = \lim_{t\to x^-} g(t)$
$g_{up}(x) = \max(\lim_{t\to x^-} g(t), \lim_{t\to x^+} g(t))$
$g_{dn}(x) = \min(\lim_{t\to x^-} g(t), \lim_{t\to x^+} g(t))$

Somas superiores e inferiores
$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^N (\sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x))\,(b_i - a_i)$
$\underline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^N (\inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x))\,(b_i - a_i)$
Dá pra interpretar esses somatórios como funções-escada com domínio $[a,b]\backslash P$:
$\overline{f}_P(x) = \sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x)$ se $x \in (a_i,b_i)$,
$\underline{f}_P(x) = \inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x)$ se $x \in (a_i,b_i)$.
E podemos completá-las:
$\overline{f}_{P,up} = (\overline{f}_P)_{up}$,
$\underline{f}_{P,dn} = (\underline{f}_P)_{dn}$.
Exercício. Represente graficamente
$\overline{f}_{P_1}$, $\underline{f}_{P_1}$, $\overline{f}_{P_1,up}$, $\underline{f}_{P_1,dn}$,
$\overline{f}_{P_2}$, $\underline{f}_{P_2}$, $\overline{f}_{P_2,up}$, $\underline{f}_{P_2,dn}$,
etc, para a função f e as partições P_1, P_2, P_3, P_4 da página 5.

Note que podemos “abrir” as definições de g_L, g_R, g_{up}, g_{dn}...
Por exemplo, se $P = \{0,1,2,3,4\}$ então $a = 0$, $b = 4$, $N = 4$,

$$g_{up}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0,4]\backslash\{0,1,2,3,4\} \\ \lim_{t\to 0^+} g(t) & \text{se } x = 0 \\ \lim_{t\to 4^-} g(t) & \text{se } x = 4 \\ \max(\lim_{t\to x^-} g(t), \lim_{t\to x^+} g(t)) & \text{se } x \in \{0,1,2,3,4\}\backslash\{0,4\} \end{cases}$$

e:
$g_{up}(1) = \max(\lim_{t\to 1^-} g(t), \lim_{t\to 1^+} g(t))$
$g_{up}(2) = \max(\lim_{t\to 2^-} g(t), \lim_{t\to 2^+} g(t))$
$g_{up}(3) = \max(\lim_{t\to 3^-} g(t), \lim_{t\to 3^+} g(t))$

A diferença entre a soma superior e a inferior

$\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} (\sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x) - \inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x))\,(b_i - a_i)$

Dá pra interpretar esse somatório como uma função-escada com domínio $[a,b]\backslash P$, que corresponde a pegar todos os retângulos entre $\underline{f}_P$ e $\overline{f}_P$ e deslocá-los na vertical até eles ficarem apoiados no eixo horizontal:

$\overline{\underline{f}}_P(x) = (\sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x)) - (\inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x))$ se $x \in (a_i, b_i)$,

E podemos completá-la:

$\overline{\underline{f}}_{P,up} = (\overline{\underline{f}}_P)_{up}$,

Exercício. Represente graficamente $\overline{\underline{f}}_{P_i}$ e $\overline{\underline{f}}_{P_i,up}$ para a função f e as partições P_3, P_1 e P_5 da página 5.

Larguras de partições

A *largura* de uma partição P é definida como a largura do seu *maior* subintervalo:

$||P|| = \max(b_1 - a_1, \ldots, b_N - a_N)$

Vamos usar muito a idéia de uma sequência de partições "cada vez mais finas" do intervalo $[a,b]$. Vamos precisar de duas notações novas (temporárias!):

1) $Q_1 \geq Q_2$ (pronúncia: "Q_1 é mais grossa que Q_2", ou "Q_2 mais fina que Q_1") indica que Q_1 e Q_2 são partições do mesmo intervalo e além disso $Q_1 \subseteq Q_2$; ou seja, Q_2 é obtida a partir de Q_1 subdividindo alguns intervalos de Q_1. Note que $Q_1 \geq Q_2$ implica $||Q_1|| \geq ||Q_2||$.

2) A notação $Q_1 \geq Q_2 \geq \ldots \to [a,b]$ vai indicar que $Q_1, Q_2, \ldots$ são partições de $[a,b]$ com $Q_1 \geq Q_2 \geq Q_3 \geq \ldots$ e $\lim_{i\to\infty} ||Q_i|| = 0$.

3) A notação $Q_1, Q_2, \ldots \to [a,b]$ vai indicar que $Q_1, Q_2, \ldots$ são partições de $[a,b]$ que não necessariamente obedecem $Q_1 \geq Q_2 \geq Q_3 \geq \ldots$, mas para as quais vale $\lim_{i\to\infty} ||Q_i|| = 0$.

Um modo de obter uma sequência $Q_1 \geq Q_2 \geq \ldots \to [a,b]$ é começar com $Q_1 = \{a,b\}$, e ir dividindo sempre cada subintervalo em 2: Q_2 tem 2 subintervalos, Q_3 tem 4, Q_4 tem 8, e assim por diante.

Um modo de obter uma sequência $Q_1, Q_2, \ldots \to [a,b]$ é fazer com que cada Q_i seja a partição do intervalo $[a,b]$ em i subintervalos iguais.

Funções integráveis: introdução

Seja $[a,b]$ um intervalo e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (qualquer!).

Seja $Q_1 \geq Q_2 \geq \ldots \to [a,b]$ uma sequência de partições cada vez mais finas.

Então, quando $i \to \infty$ (teorema!):

a) $\overline{\int}_{Q_i} f(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{Q_i} f(x)\,dx$ convergem para o mesmo número,

b) $\overline{f}_{Q_i,up}$ e $\underline{f}_{Q_i,dn}$ convergem para f em todo $x \to [a,b]$,

c) $\overline{\underline{f}}_{Q_i,up}$ converge para 0 em todo $x \to [a,b]$.